

Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση για να είναι T.M.?

- ① Κάθε στοιχείο στο S πρέπει να ανήκει σε μόνο 1 (για) ή να μην ανήκει.
- ② Σε $\{X \leq x\}$ πρέπει να αναχωρήσει για κάθε πραγματικό x .
- ③ $P\{X = -\infty\} = P\{X = \infty\} = \emptyset$

Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας

Ορισμός: Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας (ΣΚΠ, Cumulative Distribution Function CDF) μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως συνάρτηση:

$$F_X(x) \triangleq P[X \leq x], \quad -\infty < x < \infty$$

X - T.M.

$x \in \mathbb{R}$ (Πραγματικός αριθμός)

$X=x, X \leq x, X > x$ - γεγονότα.

Παράδειγμα

Έστω X = αριθμός γραμμάτων σε 3 ανεξάρτητες πηγές κειμένου.

Η ΣΚΠ (Συνάρτηση Μέγιστης Πιθανότητας) είναι:

$$(P(X=x), x \in \mathbb{N})$$

και η σχετική με την ΣΚΠ είναι: $F_X(x) = \sum_{x_k} P_X(x_k) \cdot u(x - x_k)$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x=0 \\ \frac{3}{8} & x=1 \\ \frac{3}{8} & x=2 \\ \frac{1}{8} & x=3 \end{cases}$$

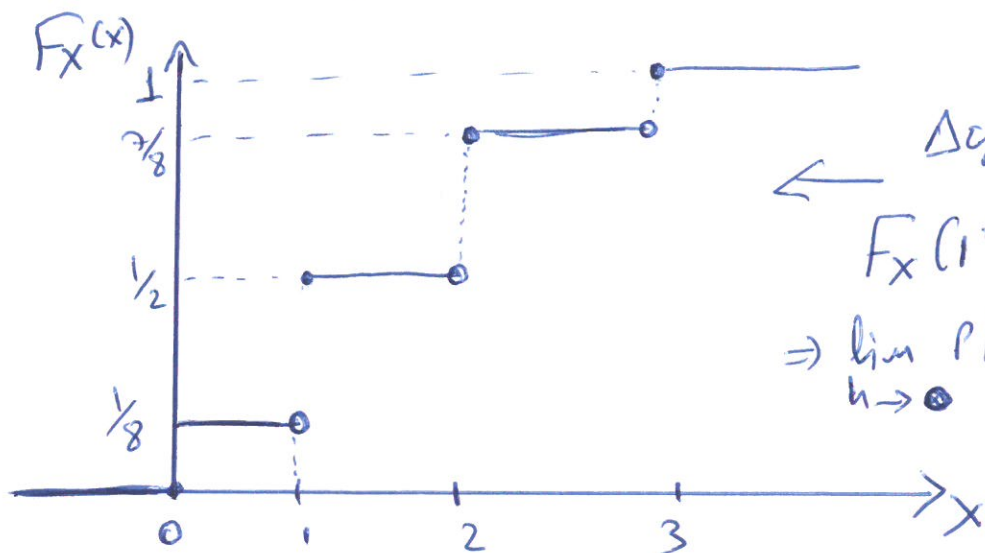
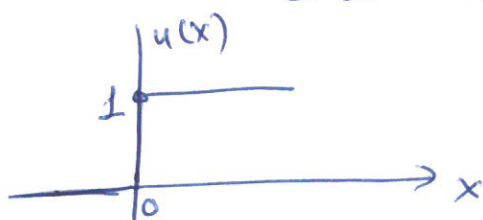
(2)

Συνάρτηση, η ΣΚΠ δίνεται:

$$F_X(x) = \frac{1}{8}u(x) + \frac{3}{8}u(x-1) + \frac{3}{8}u(x-2) + \frac{1}{8}u(x-3),$$

$$\text{όπου } u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty)$$

(βλ. αλυσίδα γραφικών τριώνων)



Δεσφά συνεχούς συνάρτησης
 $F_X(1^+) = F_X(1) \neq F_X(1^-)$
 $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} P[X \leq \underbrace{1+h}_{1^+}] = P[X \leq 1]$

Ιδιότητες

① $0 \leq F_X(x) \leq 1$, Απο Αξιώμα I ($P(A) \geq 0$), και Αξιώμα 2 ($P(A) \leq 1$)

② $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ ($F_X(\infty) = 1$), Απο Αξιώμα II ($P(S) = 1$)

Πράγματι, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} P[X \leq x] \stackrel{\text{Λήμμα 8}}{=} \textcircled{3} \rightarrow \text{by eq. } \textcircled{9}$

$$P\left[\lim_{x \rightarrow \infty} [X \leq x]\right] = P[X \leq \infty] = P[S] = 1$$

$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad (F_X(-\infty) = 0)$

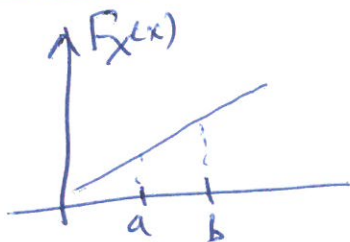
Από Λήμμα 3 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = P[X \leq -\infty] = P[\emptyset] = 0$

$\textcircled{4} \boxed{A: \alpha < b, F_X(\alpha) \leq F_X(b)}$

Απόδειξη: $\{X \leq \alpha\} \subset \{X \leq b\} \stackrel{\text{Λήμμα 7}}{\Rightarrow} P(X \leq \alpha) \leq P(X \leq b)$ $(A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B))$

$$\Rightarrow F_X(\alpha) \leq F_X(b)$$

$\Rightarrow \text{H } F_X(x) \text{ είναι συνεχώς αυξανόμενη (γάρβωμένη) συνάρτηση}$

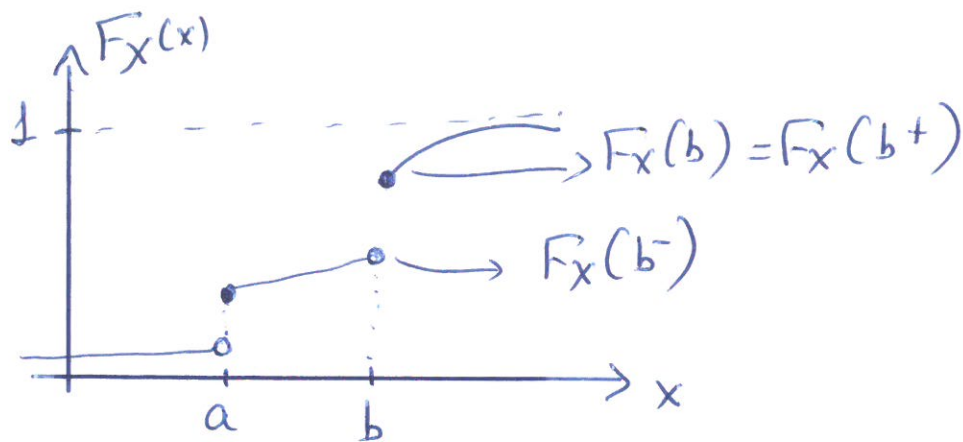


$\textcircled{5} \text{H } F_X(x) \text{ είναι δεξιά συνεχής:}$

$$F_X(b) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(b+h) \triangleq F_X(b^+), \quad h > 0$$

Απόδειξη: $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(b+h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} P[X \leq b+h]$

$$\stackrel{\text{Λήμμα 8}}{=} P\left[\lim_{h \rightarrow 0^+} (X \leq b+h)\right] = P[X \leq b] = F_X(b)$$



(4)

$$\textcircled{6} \quad \boxed{P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)} \quad \textcircled{i}$$

Παράγν, $(-\infty, a] \cup [a, b] = (-\infty, b] \xRightarrow{\text{Aξ. III}}$

$$\underbrace{P[-\infty < X \leq a]}_{F_X(a)} + P[a < X \leq b] = \underbrace{P[-\infty < X \leq b]}_{F_X(b)}$$

$$\Rightarrow P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\textcircled{7} \quad \text{Έστω } F_X(b^-) \triangleq \lim_{x \rightarrow b^-} F_X(x) :$$

$$P[X=b] = \underbrace{F_X(b)}_{P[X \leq b]} - \underbrace{F_X(b^-)}_{P[X < b]} \quad \textcircled{ii} \quad \leftarrow \text{Για ασυμμετρία ή μηδεν ΣκΠ.}$$

Παράγν, $\{X=b\} \cup \{X < b\} = \{X \leq b\} \xRightarrow{\text{Aξ. III}}$

$$P[X=b] + P[X < b] = P[X \leq b] \quad \textcircled{iii}$$

$$\hookrightarrow P[X < b] = P\left[\lim_{h \rightarrow 0^+} \{X \leq b+h\}\right] \stackrel{\text{Aξ. III}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} P[X \leq b+h]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(b+h) = F_X(b^-) \quad \textcircled{iv}$$

$$(iii) + (iv) \rightarrow (ii): P[X=b] = F_X(b) - F_X(b^-)$$

5

$$(8) \quad P[a \leq X \leq b] = P[X=a] + P[a < X \leq b]$$

$$\stackrel{(ii)+(i)}{=} F_X(a) - F_X(a^-) + F_X(b) - F_X(a) = F_X(b) - F_X(a^-)$$

Beobachtung: An $F_X(x)$ einen Sprung bei

$$P[X=b] = F_X(b) - F_X(b^-) = 0$$

Zusatz: $P[a < X < b] = P[a \leq X < b] = P[a < X \leq b]$

$$= P[a \leq X \leq b]$$

$$(9) \quad \{-\infty < X < \infty\} = \{-\infty < X \leq x\} \cup \{X > x\} \stackrel{A_{\mathbb{R}}^{III}}{\Rightarrow}$$

$$P\{-\infty < X < \infty\} = P\{-\infty < X \leq x\} + P\{X > x\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P\{X > x\}}_{\text{Zusatz}} = 1 - F_X(x)$$

Zusatz:

$$(10) \quad \begin{aligned} P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ P(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a^-) \\ P(a \leq X < b) &= F_X(b^-) - F_X(a^-) \\ P(a < X < b) &= F_X(b^-) - F_X(a) \end{aligned}$$

Open or
discontinuous.

ΕΙΣΗ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

6

Α) Διακριτή ΤΜ:

Ορισμός: Μια ΤΜ καλείται Διακριτή (discrete) όταν παίρνει πεπερασμένο ή λοεγώ αριθμό τιμών άρα από αριθμό διακριτών τιμών x_0, x_1, x_2, \dots . Μπορεί να ωριγραφεί από την Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας (ΣΜΠ - Probability Mass Function (PMF))

$$P_X(x_k) = P[X = x_k]$$

Η ΣΜΠ και η ΣΚΠ συνδέονται με τις σχέσεις:

$$F_X(x) = \sum_{x_k} P_X(x_k) u(x - x_k) \quad \leftarrow \text{γραμμικό άθροισμα βεβαιωμένων συνάρτησεων-}$$

weighted sum of step functions $u(x)$

$$P_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_k^-) \\ = P[X \leq x_k] - P[X < x_k]$$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Β) Συνεχής ΤΜ:

Ορισμός: Μια ΤΜ καλείται συνεχής (continuous) όταν η ΣΚΠ είναι συνεχής ωστός και γράφει ως:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{--- (1) } (f(x) \geq 0, \forall x)$$

\hookrightarrow συνάρτηση συνολικής πιθανότητας

(7)

Η ① ικανοποιείται εάν: $f(x) = F_X'(x)$

$$P[X=b] \stackrel{②}{=} F_X(b) - F_X(b^-) = 0, \quad \forall b$$

\Rightarrow Δεν υπάρχουν βηματικά ή αβυσσές.

⑦ Mixtures TM:

Ορισμός: Μια TM αποτελείται από δύο TM που μπορεί να γραφεί ως:

$$F_X(x) = p F_1(x) + (1-p) F_2(x)$$

όπου $p \in (0,1)$, $F_1(x)$ είναι ΣΚΤΤ διακριτής TM και $F_2(x)$ είναι ΣΚΤΤ συνεχούς TM

Μπορούμε να σκεφτούμε μια mixture TM ως:

• πρώτα βάζουμε ένα νόμισμα $P(K)=p$

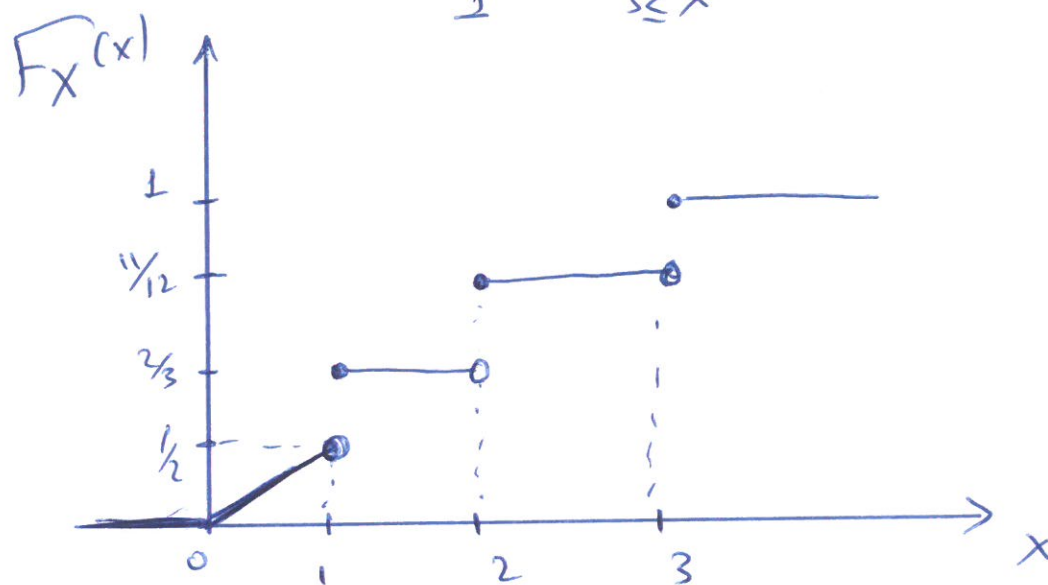
• Εάν $\begin{cases} K \rightarrow \text{έχουμε διακριτή TM } \in F_1(x) \\ T \rightarrow \text{έχουμε συνεχής TM } \in F_2(x) \end{cases}$

Παράδειγμα Τυχαίας Μεταβλητής

8

Η ΣΚΠ για ΤΜ X είναι

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/2 & 0 \leq x < 1 \\ 2/3 & 1 \leq x < 2 \\ 11/12 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$



Βρείτε το (a) $P(X < 3)$ (b) $P(X=1)$ (c) $P(X > 1/2)$
και (d) $P(2 < X \leq 4)$

$$\Rightarrow (a) \quad P\{X < 3\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{X \leq 3 - \frac{1}{n}\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(3 - \frac{1}{n}\right) \\ (F(3^-)) = \frac{11}{12}$$

$$(b) \quad P\{X=1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = F(1) - F(1^-) \\ = F(1) - \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$(c) \quad P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - F(1/2) = \frac{3}{4}$$

$$(d) \quad P(2 \leq X \leq 4) = \underbrace{F(4)}_1 - \underbrace{F(2)}_{\frac{11}{12}} = \frac{1}{12} \quad (9)$$

$$\left(F(2) = F(2^+) = \frac{11}{12} \right)$$

Άλλα ερωτήματα:

$$P(X > 3) = ?$$

$$P(X \leq 3) = ?$$

$$P(X = 4) = ?$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = ?$$

$$P(2 \leq X < 4) = ?$$

* Σημείωση:

Πρόταση 8:

$\{E_n \mid n \geq 1\}$ είναι μια αυξανόμενη σειρά γεγονότων

$$\text{τότε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right)$$