

Συνάρτηση Πυκνότητας Π.Θαυότητας

Ορισμός: Η Συνάρτηση Πυκνότητας Π.Θαυότητας (ΣΠΠ - probability density function) για ΤΜ  $X$  ορίζεται ως η παράγωγος της ΣΚΠ.

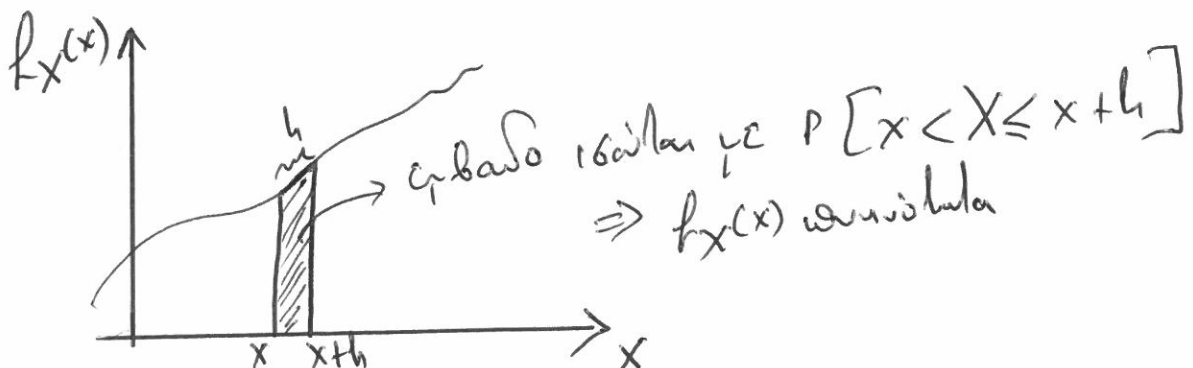
$$f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (1)$$

Σημείωση: Η ΣΠΠ είναι ένας Εξαγγραμμένος, αλλά στο χρομότιμο τρόπο καθορίζεται της συμπεριφοράς που περιέχεται στο ΣΚΠ - για το γινόμενο στο  $X=x$  και όχι μόνο για  $X \leq x$ .

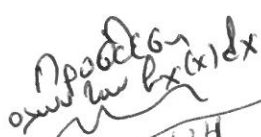
Ισότητες

$$\begin{aligned} i) \quad P[x < X \leq x+h] &= F_X(x+h) - F_X(x) = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} \cdot h \\ &\approx \frac{d}{dx} F_X(x) \cdot h = f_X(x) \cdot h \quad \left( \begin{array}{l} \text{h} \text{ μικρό} \\ \text{πολλο μικρό} \end{array} \right) \end{aligned}$$


$$\Rightarrow P[x < X \leq x+h] \approx f_X(x) \cdot h \quad (2)$$



2

$$f_x(x) \uparrow \quad \text{Area} = \int_a^b f_x(x) dx = F_x(b) - F_x(a^-)$$


$$f_x(x) \uparrow \quad \text{Area} \quad \int_x^a = F_x(b) - F_x(a^-)$$


 $p[a \leq X \leq b] = \text{"Erwartungswert von } f_X(x) \text{ auf } a \leq X \leq b \text{"}$

'Apa u  $f_X(x)$  xapaxurigea wipus lu  $G_1 - G_2$  q q'   
  $\rightarrow$   $G_1$   $G_2$  T.M

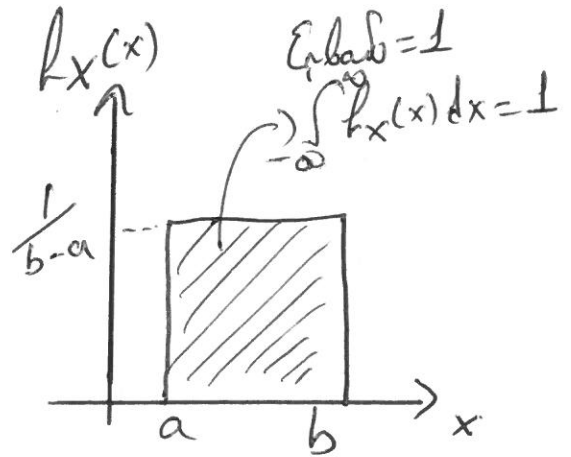
6) Ομοσπαστική συνάρτηση  $g_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} g_X(x) dx = c > 0$ , επιπλέον για Τ.Μ  $\mu \in \mathbb{R}$   
 Σημ  $f_X(x) = g_X(x)/c$

③

Γενική Συμπερασμα : Η ΣΠΠ αρνείται να οριστεί σωστά,  $H_x$ .  
Εάν η TM δεν μπορεί να ληφθεί με κανονικό διάγραμμα,  
τότε ορίζουμε ότι  $H_x(x) = 0$  για αυτό το διάγραμμα.

Παρίδουτα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a \text{ or } x > b \end{cases}$$



$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Ερώτηση: Τι γίνεται όταν  $F_X(x)$  έχει ασυνέχεια?

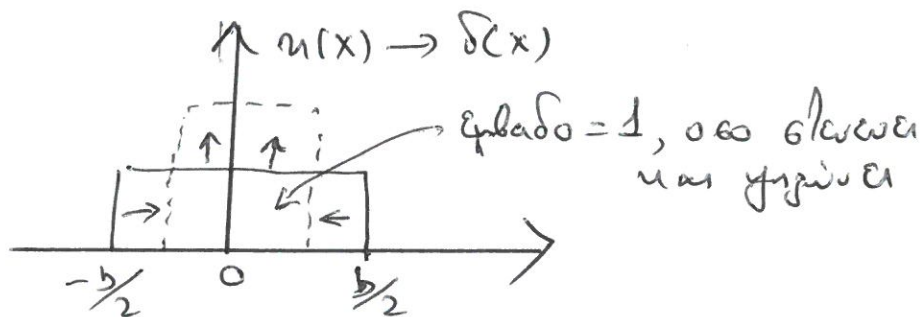
Op16yos: Egle u Anaglyni Gvriphos (step function)

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$\psi^\dagger \psi \geq 0$   
 H-Gleichung lässt sich Dirac spiegeln wie in "Gleichung"  
 und das andere ist:

(i)  $\delta(x) = 0 \quad x \neq 0$ , (ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ ,

(ii.)  $\delta(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{u(x+b/2) - u(x-b/2)}{b} = \frac{du(x)}{dx} \quad \left( u(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt \right)$



4

Έστω η Δικριτή ΤΜ  $X$  γ.ε ΣΚΠ :

$$F_X(x) = \sum_{x_k} p_X(x_k) u(x - x_k)$$

Η ΣΠΠ δίνεται από :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \sum_{x_k} p_X(x_k) \frac{d}{dx} u(x - x_k)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \sum_{x_k} p_X(x_k) \delta(x - x_k)$$

ΣΜΠ (Συνάρτηση γ.ε. συνδεδεμένη)

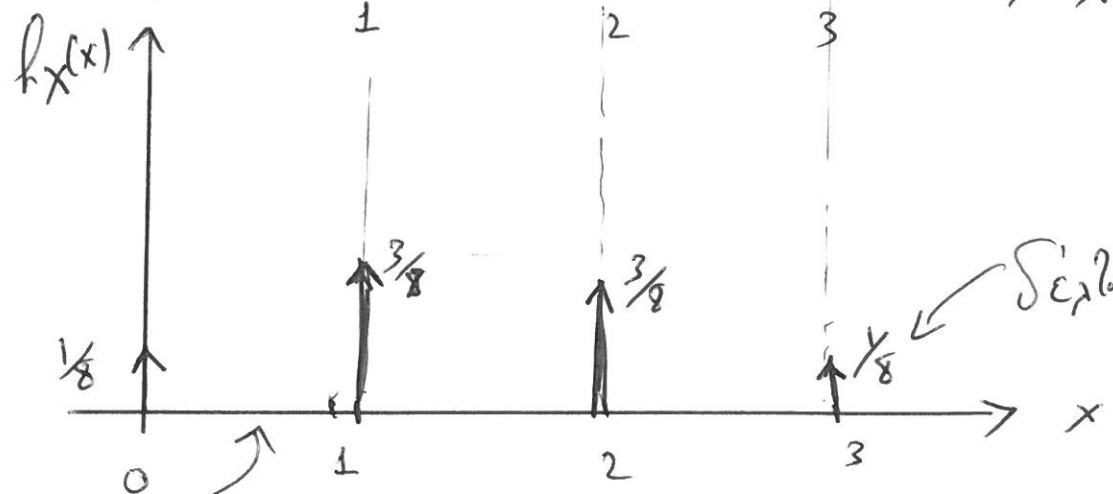
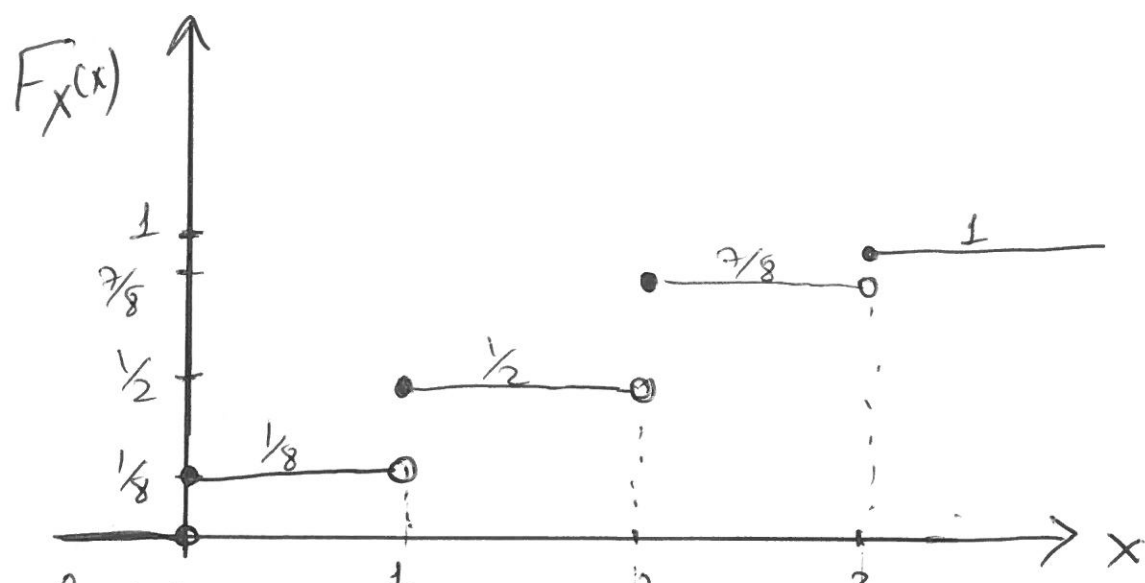
### Παράδειγμα

Έστω  $X = \#$  νεφών σε 3 ανεξάρτητες ρυγες ενός δοκιμαστικού νεφρού. Τότε, η

$$\text{ΣΜΠ: } p_X(0) = \frac{1}{8}, p_X(1) = \frac{3}{8}, p_X(2) = \frac{3}{8}, p_X(3) = \frac{1}{8}$$

$$\text{ΣΚΠ: } F_X(x) = \frac{1}{8} u(x) + \frac{3}{8} u(x-1) + \frac{3}{8} u(x-2) + \frac{1}{8} u(x-3)$$

$$\text{ΣΠΠ: } f_X(x) = \frac{1}{8} \delta(x) + \frac{3}{8} \delta(x-1) + \frac{3}{8} \delta(x-2) + \frac{1}{8} \delta(x-3)$$



$$f_X(x) = 0, x \notin \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$$

$$P[1 < X \leq 2] = F_X(2) - F_X(1) = \int_{1^+}^{2^+} f_X(x) dx = \frac{3}{8}$$

(To  $\delta_{x=2}$  also  $x=2$  depends, because appears also  $x=1$  or  $x=1$ )  
 $F_X(1) = F_X(1^+)$ ,  $F_X(1) \neq F_X(1^-)$

$$P[X=3] = F_X(3) - F_X(3^-) = \int_{3^-}^{3^+} f_X(x) dx = \frac{1}{8}$$

$$P[2 \leq X < 3] = F_X(3^-) - F_X(2^-) = \int_{2^-}^{3^-} f_X(x) dx = \frac{3}{8}$$

$$P[X \geq 2] = 1 - P(X < 2) = 1 - F_X(2^-) = 1 - \int_{-\infty}^{2^-} f_X(x) dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} //$$

## Υπο συνθήκη ΣΚΠ και ΣΠΠ

(6)

Ορισμός: Έστω ενδεχόμενο  $A$  και ΤΜ  $X$ . Η υπο συνθήκη ΣΚΠ της  $X$  δεδομένου  $A$  ορίζεται ως

$$F_X(x/A) = \frac{P[\{X \leq x\} \cap A]}{P[A]}, \quad P[A] > 0$$

Ορισμός: Η υπο συνθήκη ΣΠΠ για ΤΜ  $X$ , δεδομένου ενός ενδεχομένου  $A$ , ορίζεται ως:

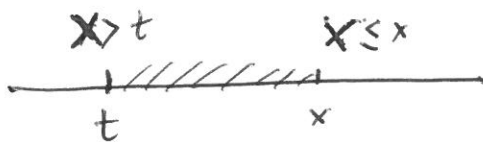
$$f_X(x/A) = \frac{d}{dx} F_X(x/A)$$

### Παράδειγμα

Ο χρόνος ζωής της μηχανής  $X$  έχει συνθετική ΣΚΠ. Ποια είναι η υπο συνθήκη ΣΚΠ και ΣΠΠ δεδομένου ως ενδεχομένου ότι  $A = \{X > t\}$  (δηλαδή η μηχανή ακόμη λειτουργεί στο χρόνο  $t$ )

$$F_X(x/X > t) = P[X \leq x / X > t] = \frac{P[\{X \leq x\} \cap \{X > t\}]}{P[X > t]}$$

$$\Rightarrow \{X \leq x \cap X > t\} = \{t < X \leq x\}, \quad x > t$$



(7)

$$\Rightarrow F_X(x/X > t) = \begin{cases} 0, & x \leq t \\ \frac{F_X(x) - F_X(t)}{1 - F_X(t)}, & x > t \end{cases}$$

Wapaxwos ws  
wpos to x

$$f_X(x/X > t) = \frac{d}{dx} F_X(x/X > t) = \begin{cases} 0 & x \leq t \\ \frac{f_X(x)}{1 - F_X(t)} & x > t \end{cases}$$

$$\left( \int_{-\infty}^x f_X(s/X > t) ds = \int_t^x f_X(s/X > t) ds, \quad x > t \right)$$

# Μέση Τιμή Τυχαίας Μεταβλητής

8

Ορισμός: Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή (expected value)

Τιμή ΤΜ ορίζεται ως το συνάρτημα:

$$E(X) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt$$

(αξιοκ το συνάρτημα δεν ορίζεται, οπότε η μέση τιμή δεν υπάρχει, π.χ ΤΜ Cauchy)

Εξισών Περιόδου: Αν η  $X$  είναι διακριτή ΤΜ με ΣΜΠ  $P_X(x_k)$ , τότε  $f_X(t) = \sum_{x_k} P_X(x_k) \delta(t - x_k)$

$$\Rightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \sum_{x_k} P_X(x_k) \delta(t - x_k) dt =$$

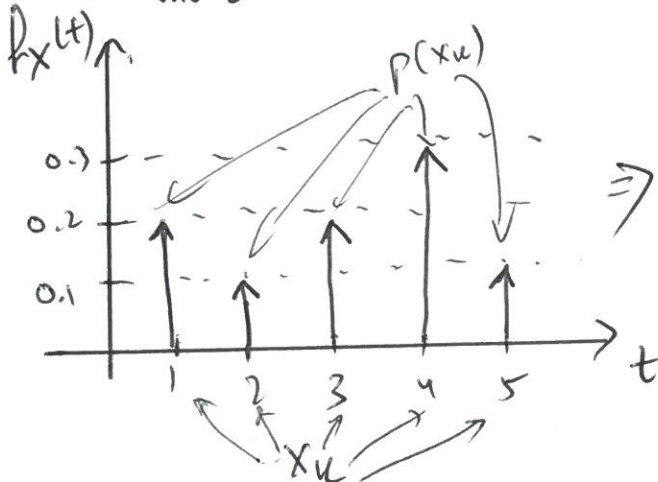
$$\sum_{x_k} P_X(x_k) \int_{-\infty}^{\infty} t \delta(t - x_k) dt = \sum_{x_k} x_k P_X(x_k) \Rightarrow$$

$$E[X] = \sum_{x_k} x_k P_X(x_k)$$

και ορίζεται μόνο αν το

$$\sum_{x_k} |x_k| P(x_k) < \infty$$

(ορίζεται οι απόλυτες τιμές με απόλυτο πλάτος)



$$\Rightarrow E[X] = 3.2$$



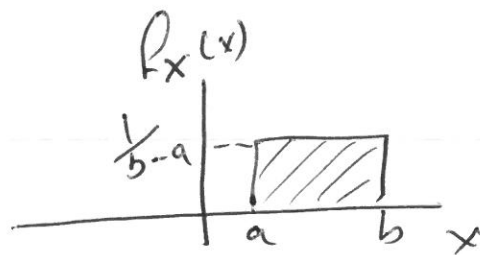
(9)

Παρατήρηση: Μπορείτε να συμπλήξετε την ΣΠΠ  $f_X(x)$  ως κατανόηση γάλας (από  $-\infty$  ως  $+\infty$ ). Είτε η γάλα  $E(X)$  αντιστοιχεί στο κεντρο βάρους της ΣΠΠ.

### Παράδειγμα 1

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

αλλιώς  
 $= 0$



Η γάλα  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a} dt$

$$= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

### Παράδειγμα 2

Πείραξη: Ρίχνω το φάρ 1 φορά.

Ο γάλας όρος της γάλας είναι γάλα:

$$E[X] = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \cdot i = 6 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{6} = 3.5 \quad \left( = \frac{6+1}{2} \right)$$

Παρατήρηση: Φυσικά δεν μπορώ να φέρω 3.5 γάλα ένα φάρ. Δηλ. δεν μπορώ να ωάτε ολ το "X" ίσως γάλα 3.5 κατ γάλα όρο". Είναι ολ μπορώ να ωάτε είναι ολ η αριθμητική γάλα γάλα αλφάτα αλφάτα γάλα ωάτα γάλα είναι 3.5.

Παράδειγμα 3

Έστω ΤΜ ~~X~~  $\in \mathbb{C}$   $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$

$$\Rightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt =$$

$$- \int_0^{\infty} t (e^{-\lambda t})' dt = -t e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt$$

$$= 0 - 0 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

(αυτή είναι η συνάρτηση ΤΜ. Σε αυτή την περίπτωση το  $\lambda$  είναι ο ρυθμός των ενδεχομένων  $\Rightarrow E(X)$  είναι ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι να συμβεί ένα ενδεχόμενο (δωδεκαήμερο ενδεχόμενο))

(Παρατηρούμε  $t e^{-t} \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ )

Παράδειγμα 4

Έστω ΤΜ ~~X~~ (δισκρίσιμη)  $\in \mathbb{C}$   $P_X(X=k) = p(1-p)^{k-1}$   
(γινώσκουμε ΤΜ)

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1}$$

(11)

Παρατηρούμε ότι:  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow$

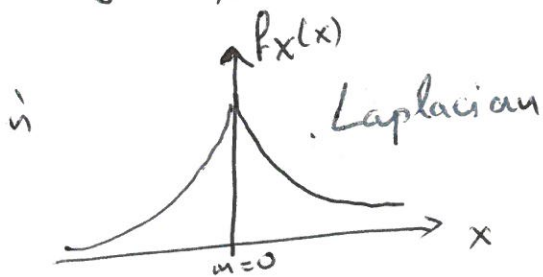
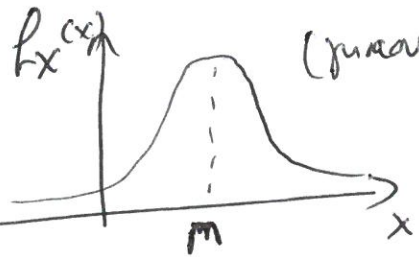
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} \Rightarrow$$

$$E[X] = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \quad (\text{Αναμενόμενο!})$$

### Παράδειγμα 5

Έστω ΤΜ με  $f_X(x)$  συμμετρική γύρω από κάποιο  $m$ ,  
 δηλ.  $f_X(m-x) = f_X(m+x)$ : π.χ



$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (t-m) f_X(t) dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} m f_X(t) dt}_m$$

$$\Rightarrow E[X] = m + \int_{-\infty}^m (t-m) f_X(t) dt + \int_m^{\infty} (t-m) f_X(t) dt$$

$$= m + \int_{-\infty}^0 x f_X(m-x) dx + \int_0^{\infty} x f_X(m+x) dx$$

$\swarrow \begin{matrix} t=m-x \\ dt=-dx \end{matrix}$ 
 $\searrow \begin{matrix} t=m+x \\ dt=dx \end{matrix}$

Τα δύο πιθανά αποτελέσματα = 0, άρα (12)  
 $f_X(m-x) = f_X(m+x)$  (Συμ. Γαλλικής)

$$\Rightarrow E[X] = m //$$

Μέση τιμή της  $Y = g(X)$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \quad E[X] = \sum_k x_k P(x_k)$$

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, \quad E[X] = \sum_k g(x_k) P(x_k)$$

Συνεχής περιγραφή      Δικριτή περιγραφή

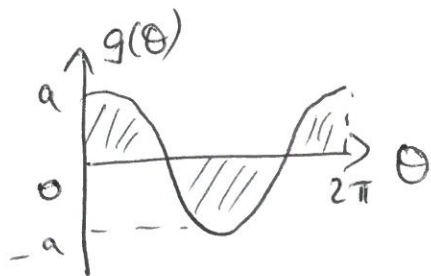
Επίσης,  $E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$  από περιγραφή της  $f_Y(y)$

Παράδειγμα

$Y = a \cos(\omega t + \Theta)$   $\Theta$  φάση (γωνία) ΤΜ ης  $f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi}$  στο  $[0, 2\pi]$

$$\Rightarrow E[Y] = \int_0^{2\pi} \underbrace{a \cos(\omega t + \theta)}_{g(\theta)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{f_{\Theta}(\theta)} d\theta = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \theta) d\theta = 0$$

(από την AC τάση)



$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \int_0^{2\pi} \underbrace{a^2 \cos^2(\omega t + \theta)}_{g^2(\theta)} \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{f_\theta(\theta)} d\theta = \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2(\omega t + \theta)}{2} d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2(\omega t + \theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \quad (\text{Μέση ισχύς})
 \end{aligned}$$

### Χρήσιμες Ιδιότητες

- ①  $E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c f_X(x) dx = c \quad \left( E[c] = \int_{-\infty}^{\infty} t \delta(t-c) dt = c \right)$
- ②  $E(cX) = \int_{-\infty}^{\infty} cx f_X(x) dx = c E(X)$
- ③  $E\left[\sum_{k=1}^n g_k(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n g_k(x) f_X(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) f_X(x) dx$   
 $= \sum_{k=1}^n E[g_k(x)]$
- ④  $E[X+c] = E[X] + c$  (η προσμετρική ιδιότητα του μέσου όρου, δηλαδή το μέσο όρο της μετατόπισης είναι η μετατόπιση)
- ⑤  $E[a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n] = a_0 + a_1 E[X] + a_2 E[X^2] + \dots + a_n E[X^n]$

## Διασπορά (Variance) Τυχαία Μεταβλητής (14)

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &\triangleq E[(X - E(X))^2] = E\left[X^2 - 2E(X) \cdot X + (E(X))^2\right] \\&= E(X^2) - E(2E(X)X) + E((E(X))^2) \\&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\&= E(X^2) - (E(X))^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)}$$

H τυχαία μεταβλητή (standard deviation) της  $X$  ορίζεται ως:

$$\sigma = \text{STD}(X) = \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

(Δίνει το "μέγεθος" της μεταβολής της  $X$  γύρω από την μέση τιμή)

### Παράδειγμα 1

Έστω  $X$  ΤΜ με  $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$  στο  $[a, b]$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \text{Var}(X) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx$$

$$\begin{aligned}\left(y = x - \frac{a+b}{2}\right) \\&= \frac{1}{b-a} \int_{-\frac{(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} y^2 dy = \frac{1}{b-a} \frac{y^3}{3} \bigg|_{-\frac{(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} = \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$



Isobutyl