

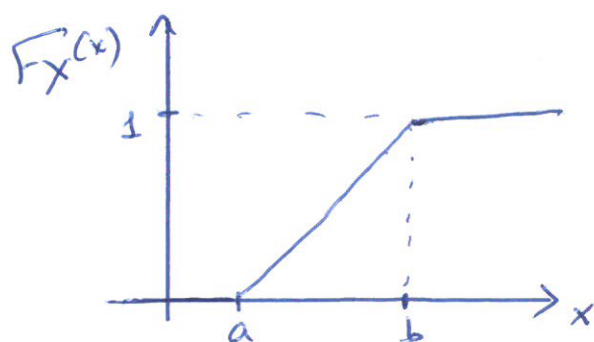
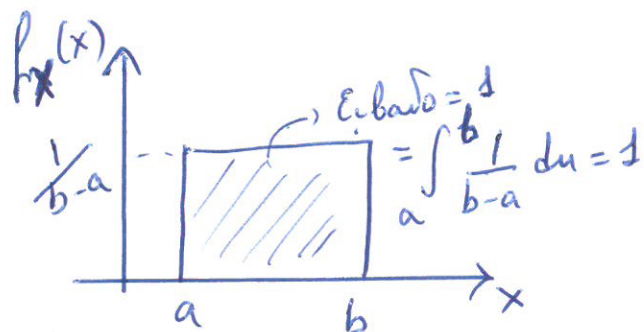
(1)

Διάσημ 9ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ(A) Ομοιόμορφη ΤΜ (Uniform RV)

Ορισμός: Μια ΤΜ λέγεται ομοιόμορφη με διαστήματα a, b όταν:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

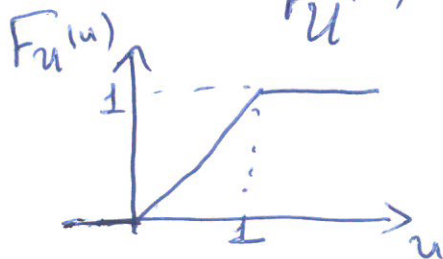
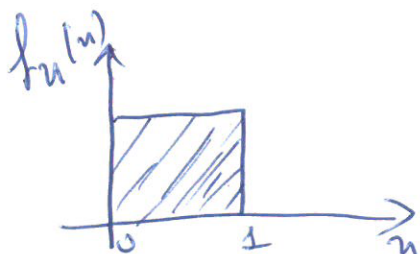
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



• Η ομοιόμορφη ΤΜ χαρακτηρίζεται π.χ. ως χρόνο άφιξης κάποιου σε μια επιδίωξη.

• Παρατήρηση: Εάν η λογική κατάσταση $u \in [0, 1]$ και είναι ομοιόμορφη, τότε

$$f_u(u) = \begin{cases} 1 & u \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Μετατρέψτε το εξεχρίσμε το X με το U (2)
ως αντιστάς:

$$X = a + (b-a)U$$

$$\Rightarrow E(U) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$E(U^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$V(U) = E(U^2) - E^2(U) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} //$$

$$E(X) = ? \quad E(X) = E[a + (b-a)U] = E(a) + E[(b-a)U]$$

$$\Rightarrow E[X] = a + bE(U) - aE(U)$$

$$\Rightarrow E[X] = a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b+a) //$$

$$\Rightarrow V(X) = V(a + (b-a)U) = (b-a)^2 V(U) = \frac{(b-a)^2}{12} //$$

$$\hat{n} \\ V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - \left[\frac{1}{2}(b+a) \right]^2$$

οωω

$$E(X^2) = a^2 + 2a(b-a)E(U) + (b-a)^2 E(U^2) \\ = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3}$$

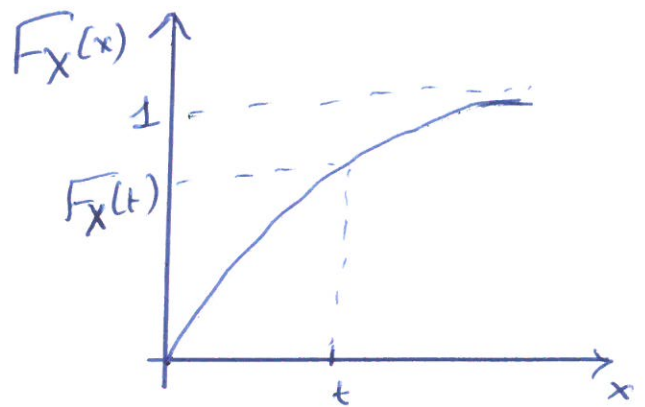
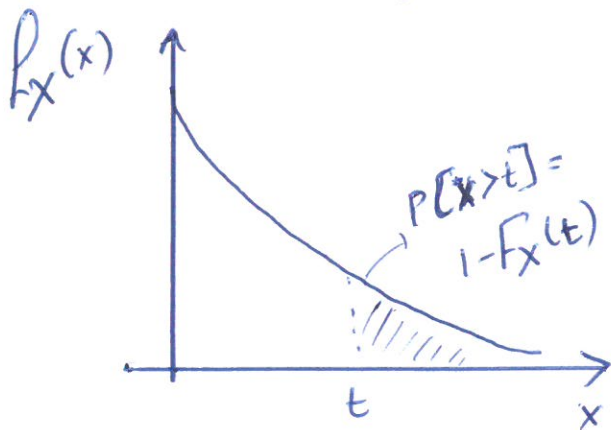
$$\Rightarrow V(X) = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} - \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} //$$

③ Ευθεία TM (The Exponential Random Variable) ③

Η Ευθεία TM X με παράμετρο λ έχει στην

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{και στην } F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$



Παρατηρήσεις:

- ① Η Ευθεία TM χαρακτηρίζεται ως διάρκεια χρόνου μεταξύ γεγονότων (π.χ ο χρόνος μεταξύ συδύσεων σε ένα τυχερό παιχνίδι κλπ), και ως διάρκεια μιας συσκευής κλπ.
- ② Η παράμετρος λ είναι ο ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν τα γεγονότα (η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός σε κάποια διάρκεια χρόνου π αυξάνεται καθώς ο ρυθμός αυξάνεται.)

(4)

$$\textcircled{3} \quad E[X] = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{integration by parts})$$

für die Varianz

$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = ? \quad \frac{d}{dx} e^{-\lambda x} = -\lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} u dv$$

oder $v = e^{-\lambda x}$
 $u = x$

$$= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x d(e^{-\lambda x}) = -\frac{1}{\lambda} \left[x e^{-\lambda x} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] =$$

$$= +\frac{1}{\lambda} \left[+ \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = +\frac{1}{\lambda} \cdot \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{1}{\lambda} \cdot \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} //$$

$$\Rightarrow \boxed{E[X] = \frac{1}{\lambda}}$$

$$\textcircled{4} \quad V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2} \quad (\text{integration by parts twice})$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

⑤ Η Ευθεία TM δεν έχει μνήμη (memoryless properties) ⑤

$$\Rightarrow P[X > t+h / X > t] = P[X > h], \quad h > 0$$

Απόδειξη:

$$P[X > t+h / X > t] = \frac{P[\{X > t+h\} \cap \{X > t\}]}{P[X > t]}$$

Η Ευθεία TM
είναι η γνήσια συνεχής
TM με αλυσίδα
ιδιότητες.

$$= \frac{P[X > t+h]}{P[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda h} = P[X > h]$$

Προσέξτε ότι X είναι η διάρκεια μιας ενός μοναδικής
Η πιο εύκολη επίλυση γέει ότι: Αν το σύστημα διαρκεί
για t χρόνο, η πιθανότητα ότι θα διαρκέσει για ακόμα
 h χρόνο είναι $P[X > h] = e^{-\lambda h}$ = πιθανότητα ότι θα
διαρκέσει για χρόνο h
χωρίς να αρχίσει να
διαρκεί ξανά για άλλη
φορά (πανεργία).

⑥ Η Ευθεία TM απονέμει ως το συνεχές όριο
της Γεωμετρικής TM

Εχω οι νέινουε διαδοχικά περιτάλα
χρονούς διάρκειας $\frac{1}{n}$, και γε περιτάλα
εωλολίας β/n . Εχω X ο χρόνος γέχρι
ωρίλη εωλολία. $X = \frac{1}{n} M$, οωυ M Γωυ-ερίου
γε ωρίλη $p = \beta/n$. M είνε ο αρίθός
γέχρι λυ ωρίλη εωλολία.

$$P(X > t) = P\left[\frac{M}{n} > t\right] = P[M > nt] =$$

$$(1-p)^{nt} = \left[\underbrace{(1-\frac{\beta}{n})^n}_{\text{"}e^{-\beta}\text{"}} \right]^t \rightarrow e^{-\beta t}, \text{ as } n \rightarrow \infty$$

\Rightarrow X ενδεχόμεν ΤΜ \in $\omega_{\alpha_1} \text{ cpo}$ β .

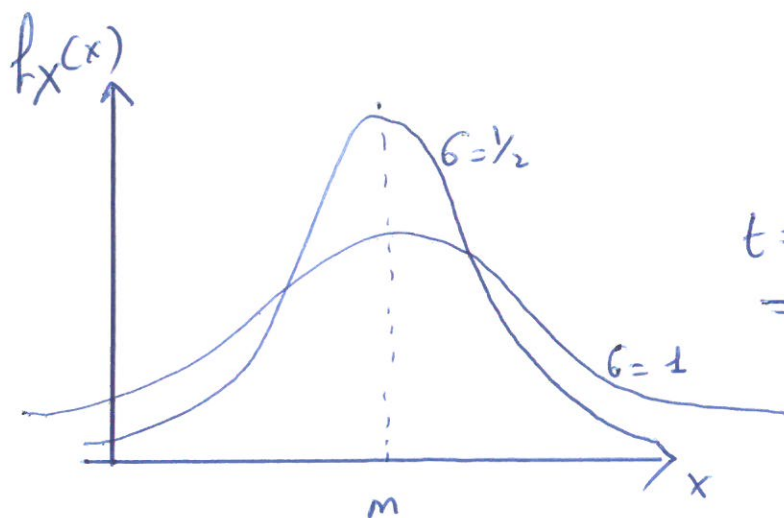
⑦ Γυαυγιαν (Καρυμνι) Καλαυγιαν (Gaussian DF)

H X nagsiklas Γνωστική ή κανονική (Normal) ΤΜ
 με μέση τιμή (mean value) m , και λογική απόκλιση
 (standard deviation) $\sigma > 0$, όπου η ΣΠΤ δίνεται από:

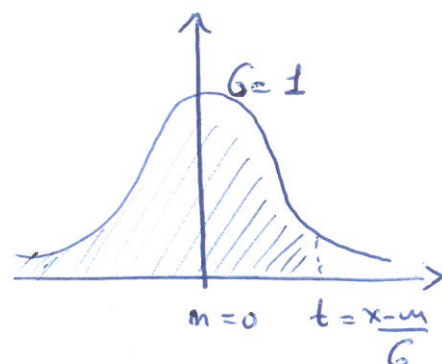
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

(erweiterten normal dist $n=0$ var $\sigma=1$)

(7)



$$t = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow$$



$$P[X \leq x] = P\left[\frac{x - \mu}{\sigma} \leq t\right] = \Phi(t)$$

- Η Γκαουσιανή ΤΜ οφείλεται στο "Κεντρικό Οριακό Θεώρημα" (αυτὸ δίνει στο ύψος στο γινόμενο)
- Η Γκαουσιανή ΤΜ έχει από σημαντικό ρόλο στα συστήματα επικοινωνιών (παραμορφώσεις θορύβου), κτλ.

Η ΣΚΠ δίνεται από:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du \quad t = \frac{u - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

όπου $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, είναι η ΣΚΠ της

Γκαουσιανής ΤΜ με μέση τιμή $\mu = 0$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$ (standard normal)

Ορισμός: $Q(x) \triangleq 1 - \Phi(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt$

(8)

$Q(0) = 1/2$, $Q(-x) = 1 - Q(x)$, $\Phi(x) = Q(-x)$

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις Q και Φ δεν έχουν αριθμητική μορφή, και δίνονται από πίνακες (Δείτε πίνακες στο τέλος της διαλέξης)

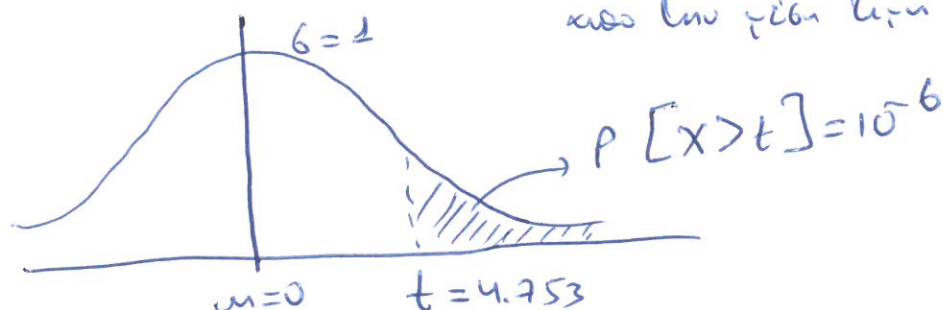
Παράδειγμα: Έστω τυχαία μεταβλητό είδημα στο οποίο η είσοδος V και έξοδος Y συνδέονται με την σχέση $Y = aV + N$, όπου $a = 10^{-2}$, και N γκαουσιανός θόρυβος με μέση τιμή $m=0$, $\sigma=2$. Βρείτε την τιμή του V που κάνει $P[Y < 0] = 10^{-6}$

$$\Rightarrow P[Y < 0] = P[aV + N < 0] = P[N < -aV]$$

$$= \Phi\left(\frac{-aV}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{aV}{\sigma}\right) = 10^{-6}$$

Από τους πίνακες, $\frac{aV}{\sigma} = 4.753 \Rightarrow V = 950.6$

↳ 4.753 είναι η τιμή που δίνει η τιμή



(9)

Παράδειγμα 2

X Γκαουσιανή ΤΜ με $\mu=10$ και $\sigma^2=16$

$$P(X \leq 20) = ? \Rightarrow P(X \leq 20) = \Phi\left(\frac{20-10}{\sqrt{16}}\right) = \Phi(2.5)$$

$$\Rightarrow P(Z \leq 2.5) = 99.38\% \quad // \quad (Z \text{ ΤΜ με } \mu=0, \sigma=1)$$

Παράδειγμα 3

Αντικείμενα μιας επιλογής: $m=70$
 $\sigma^2=36$

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός γυναικών είναι 85. Ποιο είναι το "ποσοστό των" 60 όψεων με την υποχρεωτική λίγη? ("top %")

$$P(X \geq 85) = P(m + Z\sigma \geq 85) = P(Z \geq \frac{15}{6}) = P(Z \geq 2.5)$$

$$= 100 - 99.38\% = 0.62\% //$$

Ⓐ Κατανομή ΓΑΜΜΑ (Gamma)

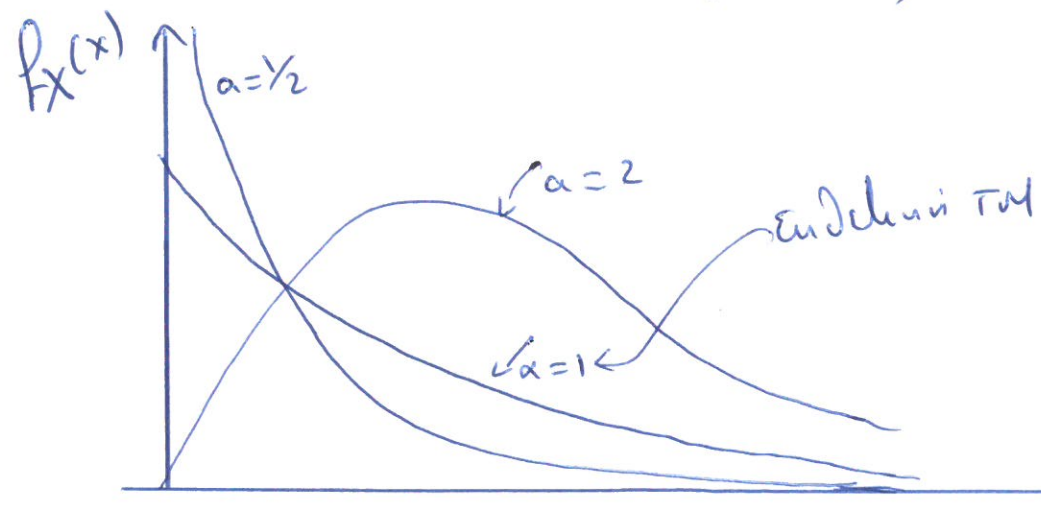
Η ΣΠΠ για ΤΜ X αν υποδείξει την κατανομή
 λίγη με παράμετρους $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, δίνεται ως
 εξής:

$$f_X(x) = \frac{\beta (\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 < x < \infty$$

όπου η συνάρτηση $\Gamma(z)$ δίνεται ως εξής:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad z > 0$$

Ποιότητες της $\Gamma(z)$:
(recursive) $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
 $\Gamma(m+1) = m!$, όπου $m \geq 0$ ακέραιος.



• Η ΤΜ Γάμμα είναι "εξέλιξη" (λόγω της συνάρτησης $\Gamma(z)$) και έχει πολλές εφαρμογές, π.χ. περιγράφει το χρόνο εμφάνισης οφθαλμών, το χρόνο ζωής συσκευών και ανθρώπων κλπ.

• Μεταβιβάσεις με παραμέτρους α και β μπορούμε να περιγράψουμε πολλές είδη παρατηρούμενων δεδομένων (π.χ. $\alpha=1 \rightarrow$ Ευθεία ΤΜ)

π.χ. $\alpha = \frac{\kappa}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$ (κ θετικός ακέραιος)

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{x^{(\kappa-2)/2} e^{-x/2}}{x^{1/2} \Gamma(\frac{\kappa}{2})}, \quad x > 0 \rightarrow \text{ΤΜ chi-square (με } \kappa \text{ βαθμούς ελευθερίας)}$$

Σημ: Το άθροισμα κ ανεξάρτητων (περασιμωμένων) τυκωτικών ΤΜ με $\mu=0$ και $\sigma=1$, είναι για ΤΜ chi-square με κ βαθμούς ελευθερίας.

(E) TM Cauchy

(11)

H TM Cauchy exa ΣΠΠ :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

• Normalization: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$

$$\frac{2}{\pi} \arctan x \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

• $E(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln |1+x^2| \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty - \infty \Rightarrow \text{δεν υπάρχει } E(X)$$

Σημείωση: Μία κατά ορισμόν πιθανότητα πρέπει να μνυ exa
 $E(X)$ (mean)