

Συναρτήσεις Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής① Τυχαία Μεταβλητή Bernoulli

Μια ΤΜ  $X = \begin{cases} 0 & \text{με πιθανότητα } 1-p \\ 1 & \text{με πιθανότητα } p \end{cases}$   
και  $\Delta X \quad S_X = \{0, 1\}$  ονομάζεται ΤΜ Bernoulli γιατί περιγράφει  
το αποτέλεσμα ενός πειράματος Bernoulli, και  
χρησιμοποιείται το  $I_A = 1$  με "επίσημα"

όπου  $I_A$  είναι η δείκτης συνάρτηση (Indicator function)  
για το γεγονός  $A$ . 
$$I_A(z) = \begin{cases} 0, & z \notin A \\ 1, & z \in A \end{cases}$$
  
 $I_A(z)$  είναι ΤΜ γιατί δίνει ένα αριθμό σε κάθε  
βλίσκο (αποτέλεσμα) του πειράματος  $\Delta X \quad S$

• Κάθε πείραμα Bernoulli, όπως πάλι είναι ο ορισμός  
του ενδεχομένου  $A$ , είναι αντικείμενο με το πείραμα ενός  
(ή ο ίδιος) πειράματος. Το πείραμα ενός πειράματος μπορεί  
να θεωρηθεί ως αντιστοιχισμός ενός βλίσκου  
μετατρέποντας συναρτήσεις των βλίσκων  $\Omega$  και  
η ΤΜ Bernoulli είναι το αντίθετο.

(2)

Η κατανομή έχει για παράμετρο  $p$ , όπου  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$  είναι η πιθανότητα ότι το πείραμα είναι επιτυχία.

ΣΗΠ:

$$P(X=0) = 1-p$$
$$P(X=1) = p$$

$$E[X] = \sum_n n P_X(n) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p //$$

$$V(X) = E[X^2] - E^2[X] = \sum n^2 P_X(n) - p^2$$
$$= 1^2 \cdot p + 0^2(1-p) - p^2 = p - p^2 = p \underbrace{(1-p)}_q = pq //$$

## (2) Γενίκευση Τ.Μ

Ευχαίστε ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας  $p$ , μέχρι να παρατηρήσουμε μια επιτυχία. Ο αριθμός  $X$  των προσπαθειών που θα χρειαστούν να γίνει Γενίκευση Τ.Μ με παράμετρο  $p$ .

$$S_X = \{ 1, 2, \dots \}$$

$$\underline{\Sigma \text{ΜΠ:}} \quad \boxed{P_X(k) \triangleq P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p} \quad (3)$$

όπου  $p$  είναι η πιθανότητα επιτυχίας  $k=1,2,\dots$

Παρατήρηση: Κάποτε για ενδιαφέρει ο αριθμός  $X' = X-1$   
των αποτυχιών για τον οποίο έχουμε

$$P[X'=k] = P[X=k+1] = (1-p)^k \cdot p, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$E[X] = ? = \sum_{k=1}^{\infty} k P[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} \quad \leftarrow \text{αφαιρούμε ως υπολογιστικό κόλπο το αθροίσμα.}$$

$$\text{Ξεχωρίζουμε ότι} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

Παραγωγίζουμε ως προς  $p$  δέξια και αριστερά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{p^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow E[X] = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} = p \left( \frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p} //$$

(4)

$$\text{Var}[X] = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X=k) - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$\underbrace{k=1}_{\text{αρχικά να υπολογιστεί το } \sum}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^k = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow (-1) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = -\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \text{Var}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} \cdot p - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \underbrace{\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}}_{E[X^2]} - \frac{1}{p^2}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2} //$$

### Παράδειγμα Γενίκευμένη ΤΜ

Ένα δίκτυο έχει  $N$  αδελφές και  $M$  γαίες γωίες.  
 Διαγείρει γωίες στην λυχν, για κάθε φορά, μέχρι  
 να διαγείρει για γαίρη γωία. (σε εναλλακτική).

$T_i$  είναι η διαδικασία σε χρειάζεται

(α) Αριθμός η Γραμμάτια.

(β) Ταξινόμηση κ Γραμμάτια.

Τ.Μ.  $X = \text{αριθμός των βραβυγμάτων μέχρι να διαλεγεί η κ τύχη η σωστή}$  ⑤

$$(a) P(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad n=1,2,\dots$$

$$p=? \quad p = \frac{M}{M+N}$$

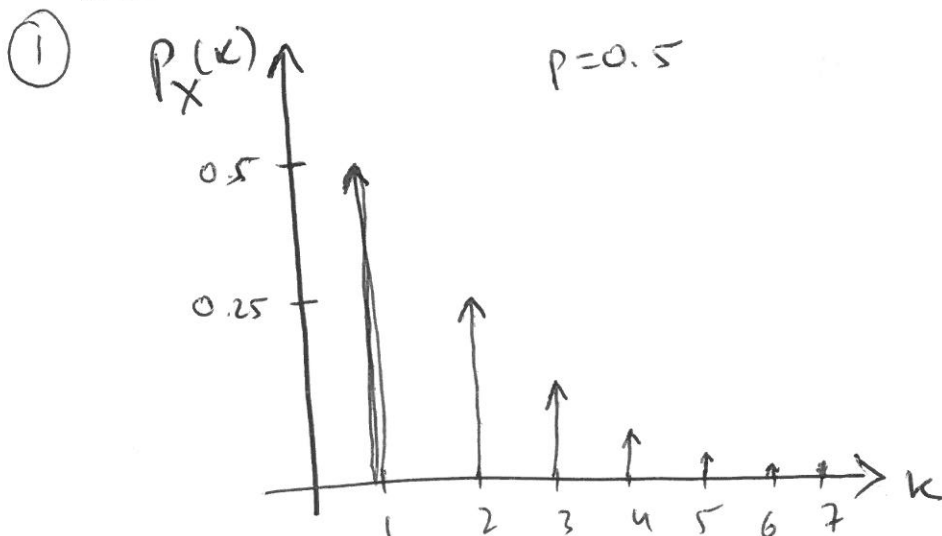
$$\Rightarrow P(X=n) = \left(\frac{N}{M+N}\right)^{n-1} \cdot \frac{M}{M+N} = \frac{MN^{n-1}}{(M+N)^n} //$$

$$(b) P(X \geq k) = P(\text{τα πρώτα } k-1 \text{ βραβυγμάτων ηταν αωδωχία})$$

$$= (1-p)^{k-1} = \left(1 - \frac{M}{M+N}\right)^{k-1}$$

$$= \left(\frac{N}{M+N}\right)^{k-1} //$$

### Παράδειγμα



$$(2) \quad P[X \leq k] = \sum_{j=1}^k P(1-p)^{j-1}$$

(6)

$$= 1 - (1-p)^k = (1-p)^k //$$

(3) Η Γεωμετρική ΤΜ δεν έχει μνήμη (Memoryless Property)  
δηλ.,

$$P[X \geq k+j | X > j] = P[X \geq k], \quad \forall j, k > 0 *$$

(Η Γεωμετρική Διακριτή ΤΜ έχει αυτή την ιδιότητα)

Αυτή η εξίσωση δηλώνει ότι εάν δεν έχουμε επιτυχία στις πρώτες  $j$  δοκιμές, τότε η πιθανότητα να χρειαστεί να κάνουμε τουλάχιστον  $k+j$  δοκιμές είναι ίδια με την πιθανότητα αρχικά να έχουμε τουλάχιστον  $k$  δοκιμές. (Δηλαδή, κάθε φορά που έχουμε αποτυχία, το βόμβινα "ξεχνά" και ξεκινά από την αρχή, σαν να ήταν η πρώτη δοκιμή.)

(4) Η Γεωμετρική ΤΜ χρησιμοποιεί τον αριθμό δοκιμών για να δώσει ανεξάρτητες γεγονότων (Εξοχικώς)

(5) Η ΤΜ  $X'$  χρησιμοποιείται ως ΣΜΤ για τον αριθμό αερίων σε μια αέρα.

\* Also due to its "memoryless property"

(7)

$$P[X \geq k+j / X > j] = \frac{P[X \geq k+j \text{ and } X > j]}{P[X > j]}$$

$$= \frac{\sum_{i=k+j}^{\infty} (1-p)^{i-1} \cdot p}{\sum_{i=j+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} \cdot p} = \frac{(1-p)^{k+j-1} \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m \cdot p}{(1-p)^j \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m \cdot p}$$

$$= (1-p)^{k-1} = P[X \geq k] //$$

$$\Rightarrow P(X \geq k) = \sum_{j=k}^{\infty} (1-p)^{j-1} \cdot p = p (1-p)^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m$$

$$= p (1-p)^{k-1} \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{k-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P[X \geq k+j / X > j] = P[X \geq k]}$$



### ③ Διωνυμική ΤΜ (Binomial RV)

8

Ορισμός: Έστω  $I_1, I_2, \dots$  ανεξάρτητες ΤΜ Bernoulli με παράμετρο  $p$ . Έστω  $X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ . Η  $X$  καλείται Διωνυμική ΤΜ με παραμέτρους  $(n, p)$  ( $S_X = \{0, 1, \dots, n\}$ )

#### Παρατηρήσεις

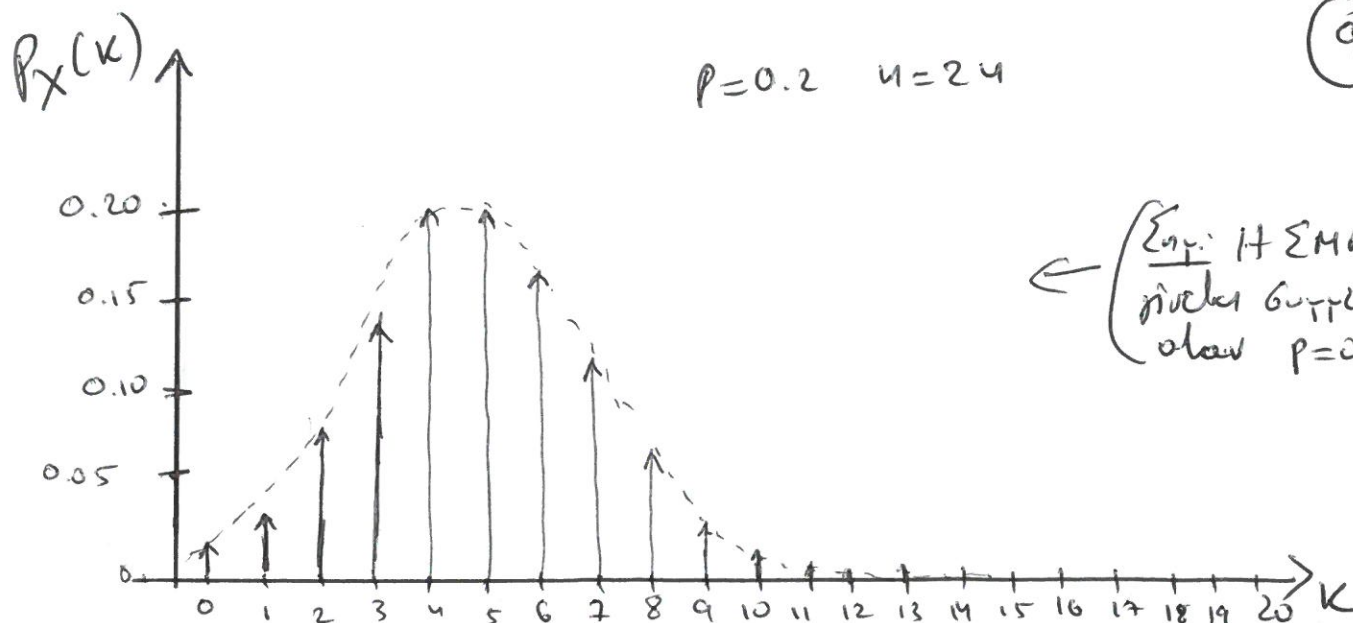
① Η  $X$  απεικονίζει τον αριθμό των επιτυχιών σε  $n$  ανεξάρτητα πειράματα, καθένα με πιθανότητα επιτυχίας  $p$  (π.χ.  $X$  μπορεί να είναι ο αριθμός κορώνων σε  $n$  ανεξάρτητες ρίξεις κέρματος)

② Η ΣΜΠ δίνεται από τον τύπο:

$$P_X(k) \triangleq P[X=k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n$$

③ Η ΣΜΠ μεγιστοποιείται στο  $k_{\max} = \lceil (n+1) \cdot p \rceil$ , οπότε  $\lceil x \rceil$  δίνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του  $x$ . Εάν το  $\lceil (n+1)p \rceil$  είναι ακέραιος, τότε η ΣΜΠ μεγιστοποιείται στο  $k_{\max}$  και στο  $k_{\max}-1$





(4) Έξαγωγος κενονομοθετήματος:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{q=1-p} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

(Binomial Series)

(4)  $E[X] = ?$

$$E[X] = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = n p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

$(k-1 \rightarrow j)$

$$= n p \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = n p (p + (1-p))^{n-1} = n p$$

$$\Rightarrow E[X] = n p$$

$\left( \begin{array}{l} \text{Var}[X] = p \cdot (1-p) \\ = p q \end{array} \right)$ 
 (Οκ θα το λύνω  
αποδείξω  
αργότερα)

# Παράδειγμα

- ① Αεροπλάνο με 4 τυχαίες-βύτηρες με αεροπλάνο με 2 τυχαίες

- Υποθέτουμε ότι η κάθε τυχαία για αεροπλάνο θα δώσει βύτη με πιθανότητα  $q$  (και δεν θα δώσει βύτη με πιθανότητα  $p=1-q$ )
- Ένα αεροπλάνο ωθεί με αεράκια σαν παράχιστον τις δύο με τυχαίες θα δαγκώνουν μαζί.

$\Rightarrow$  Είναι το αεροπλάνο με 4 τυχαίες μεγαλύτερο από το αεροπλάνο με 2 τυχαίες?

$$\Rightarrow P\left(\begin{array}{l} \text{αεροπλάνο με 4} \\ \text{τυχαίες ωθεί με αεράκια} \end{array}\right) = \binom{4}{2} q^2 p^2 + \binom{4}{3} p^3 q + \binom{4}{4} p^4 = 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 //$$

$$P\left(\begin{array}{l} \text{αεροπλάνο με 2} \\ \text{τυχαίες ωθεί με} \\ \text{αεράκια} \end{array}\right) = \binom{2}{1} p q + \binom{2}{2} p^2 = 2p(1-p) + p^2$$

$\Rightarrow$  Θέλω

$$6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 \stackrel{?}{\geq} 2p(1-p) + p^2$$

$$\Rightarrow p(p-1)^2(3p-2) \stackrel{?}{\geq} 0 \Rightarrow \text{Μόνο όταν } p \geq \frac{2}{3} (67\%)$$

Είναι το αεροπλάνο με 4 τυχαίες μεγαλύτερο.

② Ένα βύσμα λειτουργεί ως διακόπτης (II)  
 από η συσκευή και η καθεμία από τις  
 συσκευές δοσμένη (αποτελείται από τις άκρες) με πιθανότητα  
 $p$ . Ορίζουμε το βύσμα δοσμένη αν λειτουργεί  
 $\frac{1}{2}$  από τις συσκευές δοσμένων σωστά.

(a) Για ποιές τιμές του  $p$  ένα βύσμα με  
 5 συσκευές είναι πιο πιθανό να δοσμένη μεγαλύτερα  
 από ένα βύσμα με 3 συσκευές?

$$\Rightarrow P(\text{βύσμα με 5 συσκευές δοσμένη}) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5$$

$$P(\text{βύσμα με 3 συσκευές δοσμένη}) = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3$$

$$\Rightarrow \text{πιο πιθανό να δοσμένη} \quad p(5) \geq p(3) \Rightarrow p \geq \frac{1}{2} //$$

## ④ TM Poisson

⑫

Ορισμός: Μια ΤΜ  $X$  αποκαλείται TM Poisson αν υπάρχει  $\lambda$  όλων η ΣΜΠ δίδεται από τον τύπο:

$$P_X(k) = P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \begin{matrix} k=0,1,2,\dots \\ \lambda>0 \end{matrix}$$

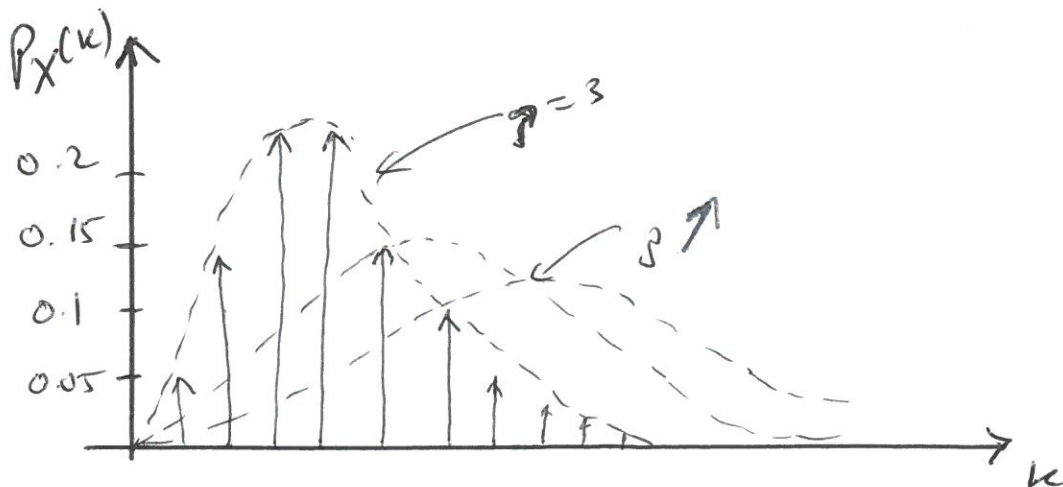
### Παρατηρήσεις

① Κανονικοποίηση:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

② Η ΤΜ Poisson περιγράφει τον αριθμό φορές ενός γεγονότος που συμβαίνει σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο ή χωρικό διάστημα. (Η ΤΜ Poisson απονέμει σε μεταβλητές που τα γεγονότα συμβαίνουν "τελείως τυχαία" στον χρόνο ή στο χώρο, π.χ. αριθμός τηλεφωνικών συνδέσεων ή ο αριθμός σφαλμάτων σε IC chips).

- Η παράμετρος  $\lambda$  είναι ο μέσος αριθμός φορές ενός γεγονότος σε μια χρονική περίοδο ή χωρικό διάστημα.



13

③  $E[X] = ?$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{\substack{m=0 \\ (k-1=m)}}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}}_{e^{\lambda}}$$

$$= \lambda \cdot e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = \lambda //$$

$$\Rightarrow \boxed{E[X] = \lambda}$$

④ Η κατανομή Poisson είναι μια <sup>γιατί</sup> προσέγγιση <sup>γιατί</sup> της κατανομής Binomial (Διωνυμική) όταν το  $n$  είναι μεγάλο

- Υποθέτουμε κατανομή Διωνυμική για την  $X(n, p)$
- Υποθέτουμε ότι  $np = \lambda$  ή  $p = \lambda/n$

$$\Rightarrow P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$



$$= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

(14)

$$= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

↖ αγγίζει 1  
↗

Χρησιμοποιώντας: ①  $e^\lambda = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\textcircled{2} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^\lambda$$

$\Rightarrow$  Έαν  $n \rightarrow \infty$   $n\lambda \rightarrow \lambda \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$

$$\Rightarrow P(X=k) = 1 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \text{ (Poisson)}$$

### Παράδειγμα Poisson

① Υποθέτουμε ότι ο αριθμός λογογραφισμών γράδων σε 1 κ. Γεγδα ενός βελγίου έχει κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda = \frac{1}{2}$

Ποια είναι η πιθανότητα ότι υπάρχει τουλάχιστον 1 γράδος στην γεγδα?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.395 //$$

② Ο αριθμός μηχανικών συνδέσεων σε ένα μηχανικό κέντρο είναι  $\lambda$  συνδέσεις/δευτερόλεπτο. Ο αριθμός των συνδέσεων σε ένα χρονικό διάστημα είναι για TM Poisson. Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχουν αποσυνδεδεμένες συνδέσεις σε  $t$  δευτερόλεπτα? Βρείτε τον πιθανότητα ότι έχει η η αποσυνδεδεμένες συνδέσεις.

$\Rightarrow$  Ο μέσος αριθμός συνδέσεων σε ένα διάστημα  $t$  δευτερολέπτων είναι  $\lambda' = \lambda t$

$\Rightarrow X(t) =$  ο αριθμός συνδέσεων σε  $t$  δευτερόλεπτα είναι για TM Poisson με μέσο κέντρο  $\lambda' = \lambda t$

$$\Rightarrow P[X(t)=0] = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

(Παρατήρηση, όσο άρκε ο χρόνος λόγω μνήμης η πιθανότητα να μην έχουμε συνδέσεις)

$$\begin{aligned} \Rightarrow P[X(t) \geq n] &= 1 - P[X(t) < n] = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$