

συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών (functions of random variables)

Πρόβλημα: Δίνεται μια τυχαία μεταβλητή  $X$  με γνωστή ΣΚΠ και μια συνάρτηση  $g(x)$ . Πώς είναι η ΣΚΠ της νέας ΤΜ  $Y = g(X)$ ?

Γενική Αρχή:

$$P[Y \in C] = P[g(X) \in C] = P[X \in g^{-1}(C)] =$$

π.χ

$$\{Y \leq y\} \leftrightarrow \{g(X) \leq y\} \leftrightarrow$$

$$\{X \leq g^{-1}(y)\}$$

ισοδύναμα  
ενδεχόμενα

$$P[X \in B]$$

$$(B = g^{-1}(C))$$

Παράδειγμα 1:

Έχω ανεξάρτητο δείγμα  $x \in N$  οριζών, κάθε ένα από τα οποία  $x_i$  με πιθανότητα  $p$ , ανεξάρτητα από τους άλλους. Το ανεξάρτητο δείγμα μπορεί να υποστηρίξει  $M$  οριζώντες ταύχους. Με βρεθεί η ΣΚΠ του αριθμού των οριζώντων που δεν μπορεί να υποστηρίξει το δείγμα,

$$Y = (X - M)^+ = \begin{cases} 0 & X \leq M \\ X - M & X > M \end{cases} \quad \text{ορίζεται: } (x)^+ = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

(-Τη οριζώντων)

Λύση:

✓ εφ' όσον είναι όλη η πιθανότητα να το δείγμα μπορεί να αντιστοιχιστεί

Διωνυσίου ΣΜΠ

$$P[Y=0] = P[X \in \{0, 1, 2, \dots, M\}] = \sum_{j=0}^M p_j$$

$$(X \leq M)$$

(2)

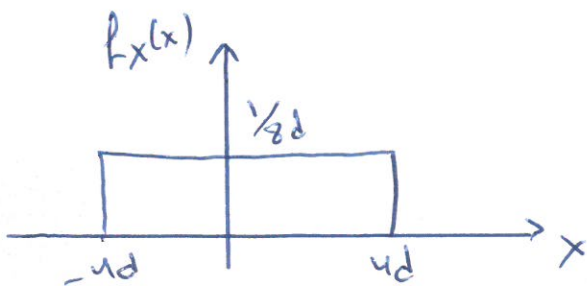
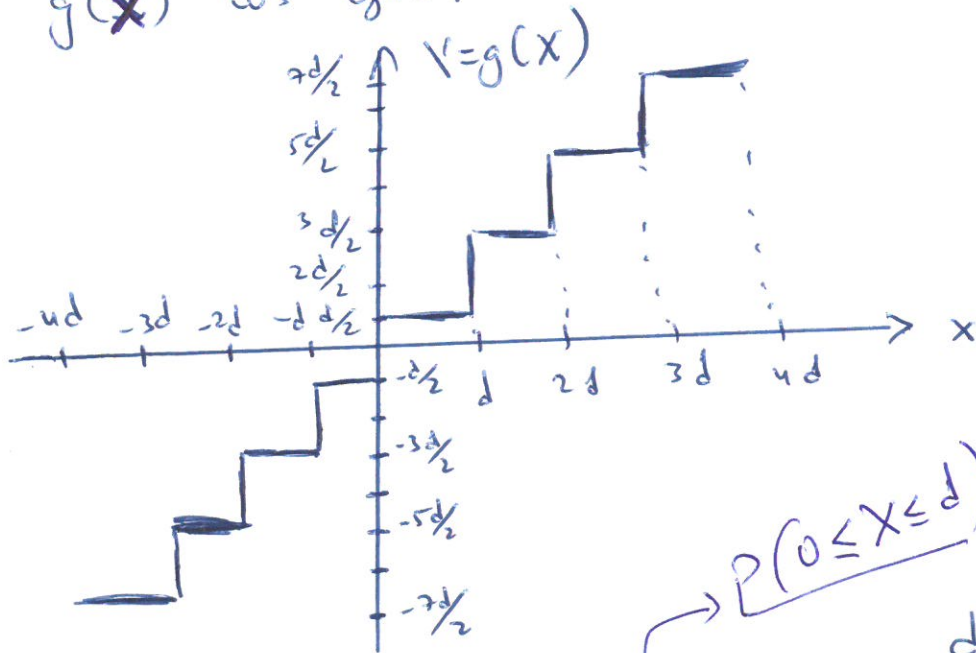
$$= \sum_{j=0}^M \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j}$$

$$P[X=k] = P[X=M+k] = P_{M+k} = \binom{N}{M+k} p^{M+k} (1-p)^{N-M-k}$$

$$0 < k \leq N-M$$

## Παράδειγμα 2

Εστω  $X$  ομοιόμορφα κατανεμημένη στο  $[-4d, 4d]$   
 και  $g(X)$  ως εξής:



$$P[X = d/2] = \int_0^d f_X(x) dx = 1/8$$

$$P[0 < X < d]$$

και ομοίως για τα  
 άλλα σημεία  
 που αναφέρονται.

Παρατήρηση: • Το  $X$  είναι συνεχής ΤΜ και το  $Y$  (3)  
 διακριτή.

- Γενικά, αν το  $g(x)$  είναι αλγόριθμος κάποιου διακριτού  $X$ , και η ΣΚΗ του  $X$  δεν είναι γ.ε.ο. στο διακριτό, τότε η ΣΚΗ του  $Y$  είναι διακριτή ή τμήσι (Η ΣΚΗ του  $Y$  θα αποτελεί συνεκτικές δόξες)
- Η ΣΚΗ του  $Y$  καθορίζεται ως ισοδύναμο ενδεχόμενα:  $\{Y \leq y\} \iff \{g(x) \leq y\} \iff \{x \leq g^{-1}(y)\}$ .

### Παράδειγμα 3

Έστω  $Y = aX + b$ ,  $a \neq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[aX + b \leq y] = P[aX \leq y - b]$$

$$= \begin{cases} P\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a > 0 \\ P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 - F_X\left(\left(\frac{y-b}{a}\right)^-\right), & a < 0 \end{cases}$$

↳ αργότερα δαν αργότερα  
 ως προς του  $a$ .



(4)

Αν η  $X$  είναι συνεχής, η ε.π.π

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$\frac{d}{dy} F_Y$$

### Παράδειγμα 4

Η γραμμική συνάρτηση για γραμμική ΤΜ είναι  
 ε.π.π. γραμμική ΤΜ με διαφορετικές παραμέτρους,

$$(Y, G): Y = aX + b, \quad G_Y = |a|G_X$$

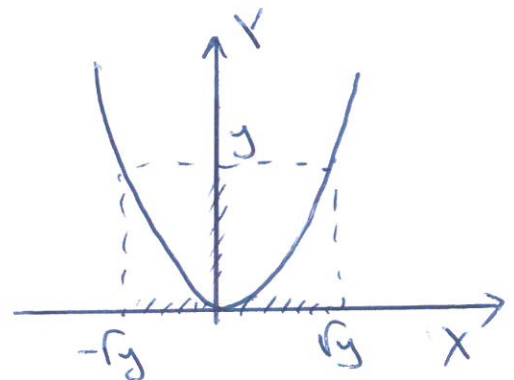
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} G_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2G_X^2}} \rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |a|G_X} e^{-\frac{(y-b-a\mu_X)^2}{2a^2G_X^2}}$$

### Παράδειγμα 5

Έστω  $Y = X^2$  (συνεχής ΤΜ)

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ P(X=0), y=0 \\ P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}], y > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases}$$



Ar  $u, X$  είναι Gaussian

(5)

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0 \quad \left( \frac{\partial}{\partial y} \text{ chain rule} \right)$$

$$\left( \frac{\partial(\sqrt{y})}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \right)$$

Παράδειγμα 6

$$Y = e^X$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[e^X \leq y] = P[X \leq \ln y] \quad y \geq 0$$

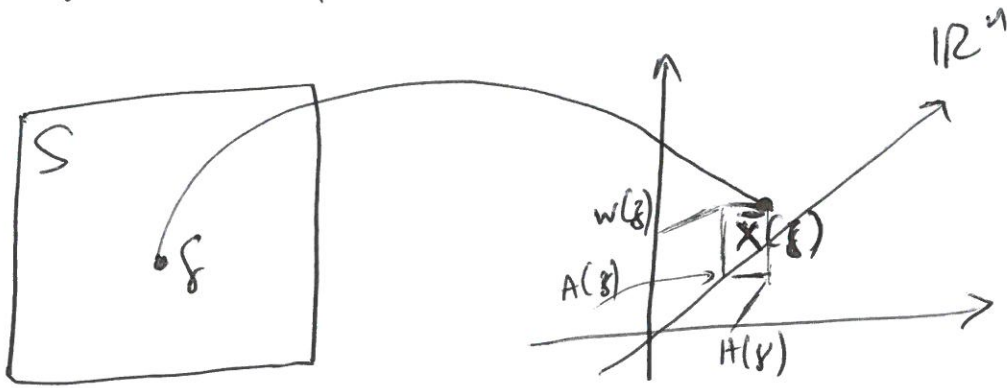
$$= F_X(\ln y) //$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y) //$$

# Διαμορφωτές Τυχαία Μεταβλητές

(6)

Ορισμός: Μια Διαμορφωμένη Τ.Μ.  $\vec{X}$  (vector r.v.) είναι για συνάρτηση από ένα Δ.Χ. στο  $\mathbb{R}^n$  (συνολο με διάσταση  $n$ )



## Παράδειγμα 1:

Εστιάσουμε το άνω μέρος ενός φοιτητή  $f$  από μια τάξη. Εστω  $H(f)$  το ύψος,  $w(f)$  το βάρος, και  $A(f)$  η ηλικία του φοιτητή. Το διάνυσμα  $\vec{X}(f) = (H(f), w(f), A(f))$  είναι για Διαμορφωμένη Τ.Μ.

## Παράδειγμα 2:

Εστω ο Δ.Χ.  $S$  όπου έχουμε δυαδικών χαρακτηριστικών που μπορούν να εμφανιστούν στην είσοδο ενός φίλτρου. Ορίσω  $X_k(f) = X(kT)$  όπου  $k=1, 2, \dots, n$ , και  $T$  η περίοδος δειγματοληψίας. Τα  $n$  δείγματα  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  αποτελούν Διαμορφωμένη Τ.Μ.

## ΖΕΥΓΗ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

(7)

Ορισμός: Έστω Τ.Μ.  $\vec{X} = (X, Y)$  που παραβάνε τις  
αυτο το αριθμητικό σύνολο  $S = \{(x_j, y_k) : j=1, 2, \dots, k=1, 2, \dots\}$

Η αυτο κοινά συνάρτηση τιμής πιθανότητας (joint PMF)

ορίζεται ως:

$$P_{X,Y}(x_j, y_k) \triangleq P[X=x_j \cap Y=y_k], \quad j=1, 2, \dots, k=1, 2, \dots$$

Για ενδεχόμενο  $A$  έχουμε:

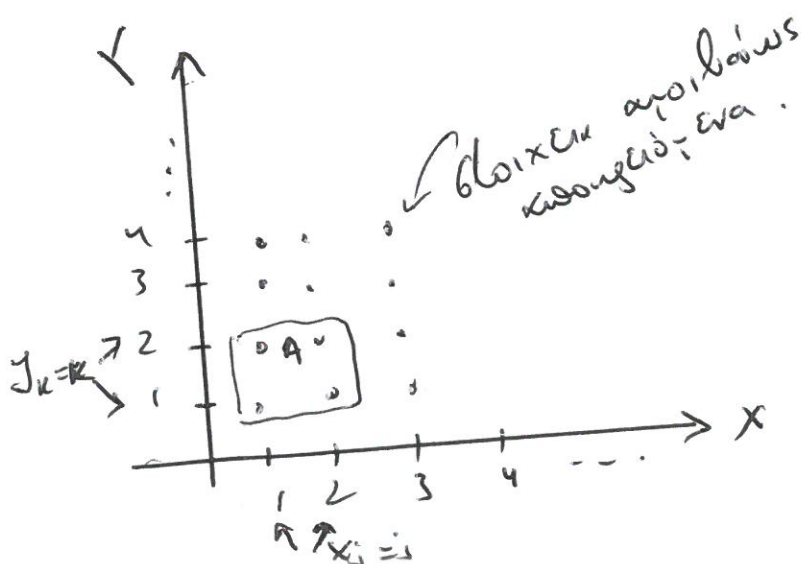
$$P[(X, Y) \in A] = \sum_{(x_j, y_k) \in A} P_{X,Y}(x_j, y_k)$$

$$= \sum_A P(X=x_j \cap Y=y_k) = \sum_A P(X=x_j | Y=y_k) \cdot P(Y=y_k)$$

Για όλο το Δ.Χ.  $S$  έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{X,Y}(x_j, y_k) = 1$$

(υπονομοθεσία)





Ορίσμός: Οι περιθώριες ΣΜΠ (Marginal PMP's) ⑧  
ορίζονται ως:

$$P_X(x_j) = P[X=x_j] = P[X=x_j \cap Y=\text{ολύτιμο}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{X,Y}(x_j, y_k) = P(X=x_j \cap Y=y_1) + P(X=x_j \cap Y=y_2) + \dots + P(X=x_j \cap Y=y_{\infty})$$

$$P_Y(y_k) = P[Y=y_k] = P[X=\text{ολύτιμο} \cap Y=y_k]$$

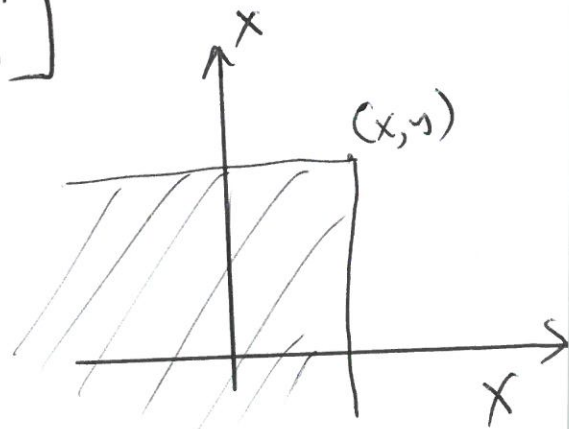
$$= \sum_{j=0}^{\infty} P_{X,Y}(x_j, y_k) = P(X=x_1 \cap Y=y_k) + P(X=x_2 \cap Y=y_k) + \dots + P(X=x_{\infty} \cap Y=y_k)$$

↳ περιθώρια ορίσματος

Η Άνω κοινή Συνάρτηση Κατανομής Αξιών:  
(joint cumulative distribution function - joint CDF)

Ορίσμός: Η άνω κοινή ΣΚΠ δύο τυχόντων τ.α. ορίζεται ως:

$$F_{X,Y}(x,y) \triangleq P[X \leq x, Y \leq y]$$





(9)

## Ιδιότητες

$$(i) \quad F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2) \quad \text{αν } x_1 \leq x_2, \quad y_1 \leq y_2$$

(Η συν συνάρτηση ως συν "συνεπαραλογιστική" συνάρτηση:  
( $F_{X,Y}(x,y)$  είναι για συνεχώς ανεξάρτητες συνάρτησεις για το  $x$  και το  $y$ ))

$$(ii) \quad F_{X,Y}(-\infty, y_1) = F_{X,Y}(x_1, -\infty) = 0 \quad (\text{είναι αδύνατο να } X \text{ ή } Y \text{ να πάρουν τιμές } < -\infty)$$

$$(iii) \quad F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$$

$$(iv) \quad F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$$

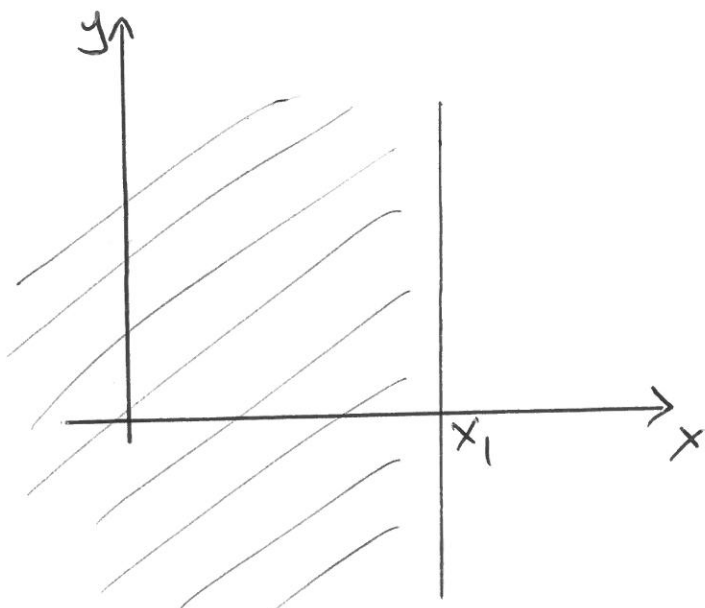
$$(v) \quad 0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$$

$$(vi) \quad \text{Οι περιθώριες συν } F_X(x), F_Y(y) :$$

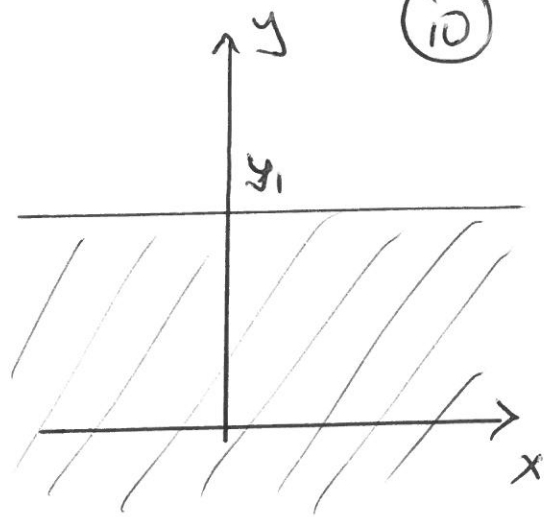
$$\bullet \quad F_X(x_1) = P[X \leq x_1] = P\left[X \leq x_1, \underbrace{Y < \infty}_{Y = \text{ολίγονο}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F_X(x_1) = F_{X,Y}(x_1, \infty)}$$

$$\bullet \quad \underline{F_Y(y_1) = F_{X,Y}(\infty, y_1)}$$



$$F_X(x_1) = P[X \leq x_1, Y < \infty]$$

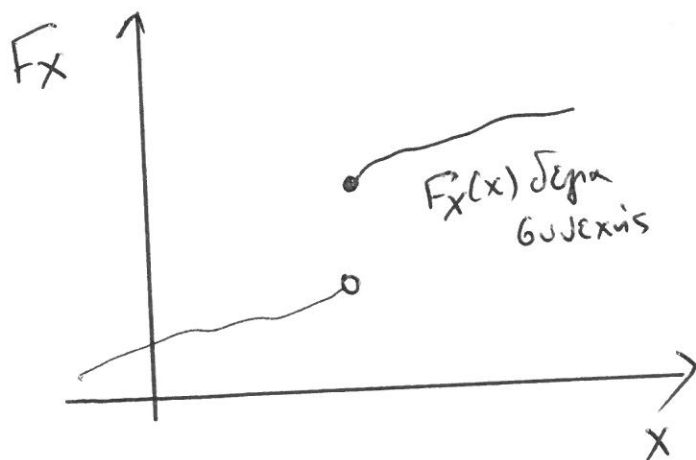


$$F_Y(y_1) = P[X < \infty, Y \leq y_1]$$

(vii) Η ΣΚΠ για ΤΜ είναι συνεχής από τα δεξιά.  
 Μπορεί να αποδειχθεί ότι η από κοινού ΣΚΠ  
 είναι συνεχής από το "boppa" και από ένα "cavalieri".

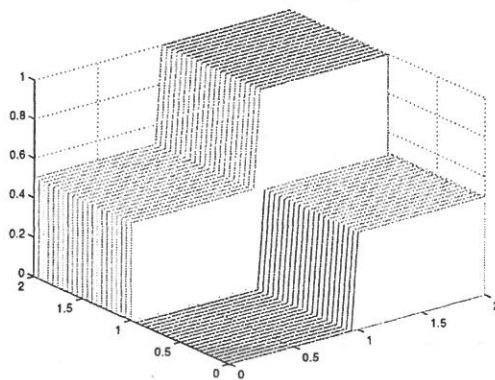
$$\lim_{x \rightarrow a^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(a,y)$$

$$\lim_{y \rightarrow b^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,b)$$



Ακριβώς  
JCOF  
(discrete)

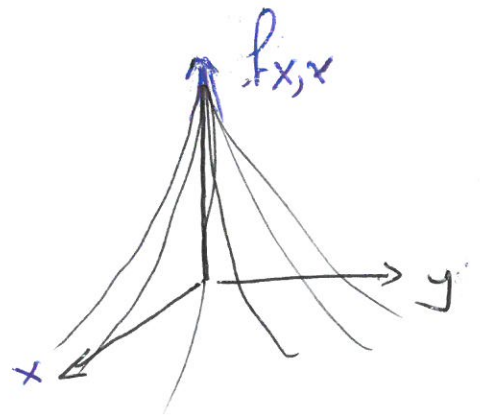
Η  $F_{X,Y}(x,y)$  είναι  
 συνεχής από τα  
 δεξιά και από πάνω.



$$(viii) \quad F_{X,Y}(x_2, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) = P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \quad (11)$$

Παράδειγμα

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta y}) & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{Αλλιώς} \end{cases}$$



Οι περιθώριες ΣΚΠ:

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$\uparrow$   
 $P[X \leq x]$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

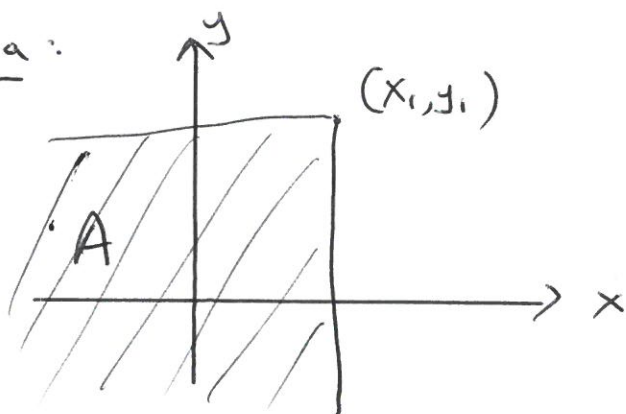
$\uparrow$   
 $P[Y \leq y]$

(Σημ: οι  $X, Y$   
ανεξάρτητες γιατί  
 $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ )

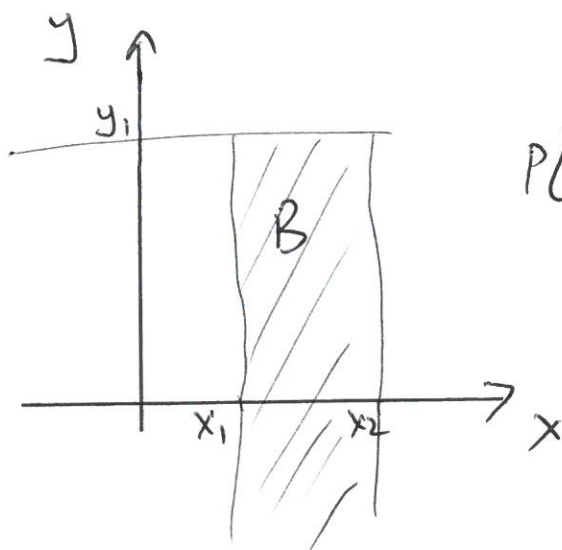
Αρα, οι  $X$  και  $Y$  είναι ξεχωριστά ευδεχτικά ανεξαρτήτως  
τε παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$  αντίστοιχα

Παρατήρηση: Η αμοιβαία Σ.Κ.Π. περιγράφεται  
ωρίως με  $X, Y$  και μπορεί να χρησιμοποιηθεί  
για τον υπολογισμό της πιθανότητας ορισμένων συνόλων.

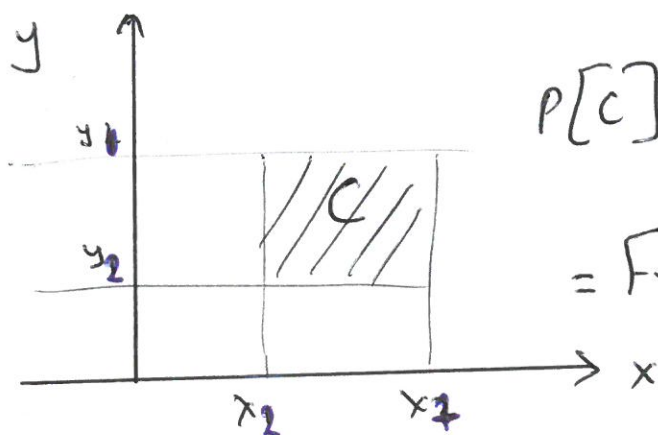
Παράδειγμα:



$$\begin{aligned} P[A] &= P[X \leq x_1, Y \leq y_1] \\ &= F_{X,Y}(x_1, y_1) \\ &= P[\{X \leq x_1\} \cap \{Y \leq y_1\}] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P[B] &= P[x_1 \leq X \leq x_2, Y \leq y_1] \\ &= F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P[C] &= P[x_2 \leq X \leq x_1, y_2 \leq Y \leq y_1] \\ &= F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) \\ &\quad - F_{X,Y}(x_2, y_1) \\ &\quad + F_{X,Y}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

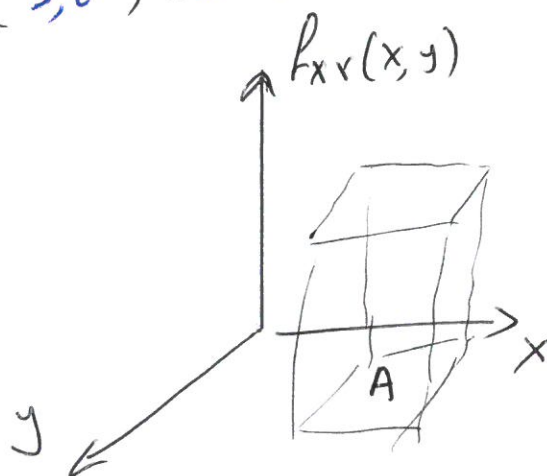


Ορισμός: Δύο ΤΜ  $X, Y$  ναγόντες από κοινά συνεκτικές  
(jointly continuous) αν υπάρχει σημείο συνέπλευσης

$\rho_{X,Y}(x,y)$  7c601x w61c:

$$P[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(s, t) ds dt$$

H  $p_{X,Y}(x,y)$  may be also written  $\Sigma n$  (joint PDF)



Isobles

Formula

(20/11)

①  $P[a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_{X,Y}(s,t) ds dt$

(H)  $a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2$  }  $A = \{(x, y) : a_1 < x \leq b_1, a_2 < y \leq b_2\}$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(s, t) ds dt = 1$$

( $\sigma$  သည်  $A$  ခေါက်  
 $\tau$  သည်  $\Delta X$  ကို  
 $\tau$  ဂျော့နီယာ ဝေပေ  
 $\tau$  ခေါက်  $\tau$  ၁)

3) Η κοινή συνάρτηση πυκνότητας:

74

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s,t) dt ds$$

4) Αν οι  $X, Y$  είναι κοινές συνεχείς, τότε μπορούμε να βρούμε την κοινή συνάρτηση πυκνότητας με παραγώγιση της κοινής ΣΠΠ:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

(Αν οι  $X$  και  $Y$  δεν είναι κοινές συνεχείς τότε η παραγώγιση μπορεί να μην υπάρχει, και η κοινή συνάρτηση ΣΠΠ όπως έχει οριστεί δεν θα την υπάρχει)

5)  $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

$$f_{X,Y}(x,y) dx dy = P(x \leq X \leq x+dx, y \leq Y \leq y+dy)$$

6) Η πιθανότητα ενός αδιαφορετικού ορθογωνίου να είναι η γινόμενο της ΣΠΠ και του εμβαδού του ορθογωνίου

$$P[x \leq X \leq x+dx, y \leq Y \leq y+dy] = \int_x^{x+dx} \int_y^{y+dy} f_{X,Y}(s,t) dt ds \approx f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

⑦ 0, περιθώρια ΣΠΠ δίδονται από: (15)

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X,Y}(x, \infty) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) dt \right) ds$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Οποιαδήποτε  $f_{X,Y}$  δεν είναι ενδιάμεσα.

Παρόμοια:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

Παρατήρηση: Γενικά, οι περιθώρια ΣΠΠ δεν είναι αρκετά για να ορίσουμε ένα αυτονομό ΣΠΠ.

- Αν γράω τις περιθώρια ΣΠΠ ή τις περιθώρια ΣΚΠ, μπορώ να βρω τις άκρες:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds, \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(s) ds$$

- Αν γράω ένα αυτονομό ΣΠΠ, μπορώ να βρω τις περιθώρια ΣΚΠ:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) dt ds$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) dt ds$$

### Παράδειγμα 1

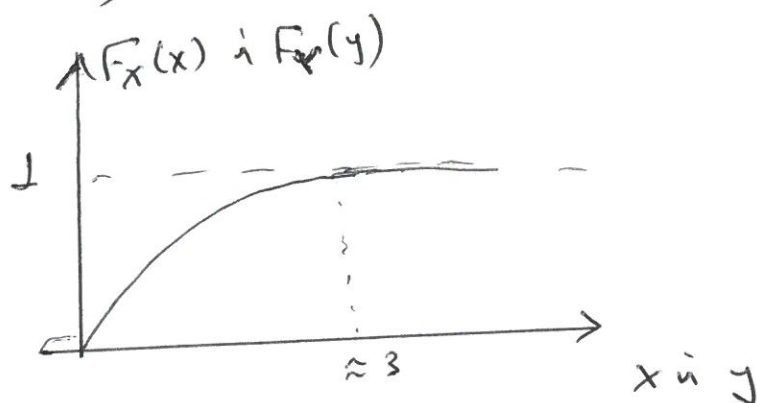
(16)

$$F_{X,Y}(x,y) = u(x)u(y) \left[ 1 - e^{-ax} - e^{-ay} + e^{-a(x+y)} \right]$$

(a)  $\Rightarrow$  Περιθώρια ΣΚΠ?

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) = u(x) [1 - e^{-ax}]$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) = u(y) [1 - e^{-ay}]$$



$$(b) P \{ -1 \leq X \leq 2, 1 \leq Y \leq 3 \} = ?$$

$$= F_{X,Y}(2,3) + F_{X,Y}(-1,1) - F_{X,Y}(-1,3) - F_{X,Y}(2,1) = \dots$$

### Παράδειγμα 2

$$\text{Η συνάρτηση } F_{X,Y}(x,y) = a \left[ \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right] \left[ \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \right]$$

Είναι για δύο ανεξ. ΣΚΠ.

$$a = ?$$

$$\Rightarrow F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1 = \frac{a\pi^2}{4} \Rightarrow a = \frac{4}{\pi^2}$$



### Παράδειγμα 3

(17)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} b(x+y)^2, & -2 < x < 2 \\ & -3 < y < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(a)  $b = ?$   $f_{X,Y}(x,y)$  αρα να είναι ΣΠΠ

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 b(x+y)^2 dx dy &= 1 = \int_{-3}^3 b \left( \frac{(x+y)^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 dy = \\ &= \int_{-3}^3 \frac{b}{3} [(2+y)^3 - (-2+y)^3] dy = \frac{b}{3} \left\{ \frac{(2+y)^4}{4} - \frac{(-2+y)^4}{4} \right\} \Big|_{-3}^3 \\ &= 104b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{104} \end{aligned}$$

(b) Περιθώρια ΣΠΠ?

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-3}^3 b(x+y)^2 dy = \frac{b}{3} (x+y)^3 \Big|_{-3}^3 \Rightarrow$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^3 - (x-3)^3}{3 \cdot 12} & -2 < x < 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-2}^2 b(x+y)^2 dx = \begin{cases} \frac{(2+y)^3 - (-2+y)^3}{3 \cdot 12} & -3 < y < 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

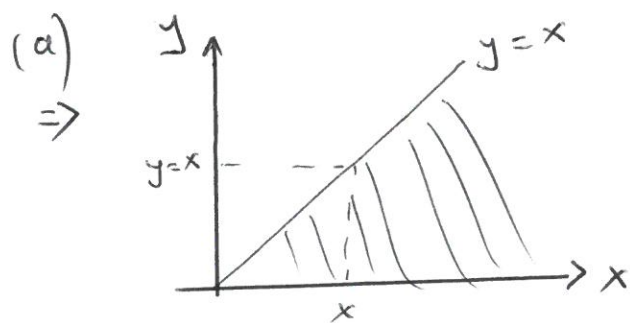
# Παράδειγμα 4

(0 ≤ y ≤ x, 0 ≤ x < ∞) (18)

Έστω  $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c e^{-x} e^{-y} & 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

(α) c = ?

(β) Περιθώρια ΣΠΠ?



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \int_0^x c e^{-x} e^{-y} dy dx =$$

$$\int_0^{\infty} c e^{-x} \left( \int_0^x e^{-y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} c e^{-x} (1 - e^{-x}) dx = \int_0^{\infty} (c e^{-x} - c e^{-2x}) dx = c \cdot 1 - c \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{2}$$

$$= 1 \Rightarrow c = 2$$

$$(β) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^x 2 e^{-x} e^{-y} dy = 2 e^{-x} \int_0^x e^{-y} dy$$

$$= 2 e^{-x} (1 - e^{-x}) \quad 0 \leq x < \infty \quad (0, \infty)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_y^{\infty} 2 e^{-x} e^{-y} dx = 2 e^{-y} \int_y^{\infty} e^{-x} dx$$

$$= 2 e^{-y} (-e^{-x}) \Big|_y^{\infty} = 2 e^{-2y} \quad 0 \leq y < \infty \quad (0, \infty)$$

## Παράδειγμα 5

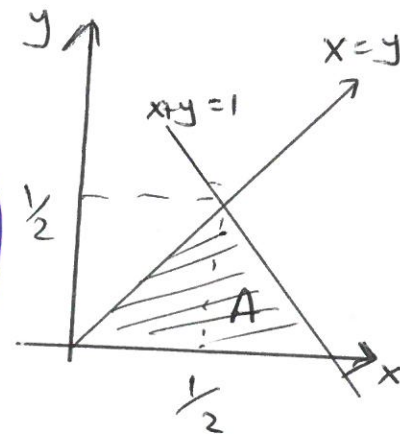
19

Βρείτε την πιθανότητα  $P[X+Y \leq 1]$  από το  
δωρισμένο παράδειγμα.

$$P[X+Y \leq 1] = \iint_A f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_y^{1-y} 2e^{-x}e^{-y} dx dy$$

$$\left( \begin{array}{l} 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ y \leq x \leq 1-y \end{array} \right)$$



$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_y^{1-y} e^{-x} dx \right) 2e^{-y} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} (-e^{-x}) \Big|_y^{1-y} 2e^{-y} dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-e^{-1+y} + e^{-y}) 2e^{-y} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} (2e^{-2y} - 2e^{-1}) dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-e^{-2y})' dy - e^{-1} = -e^{-2y} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - e^{-1} = 1 - e^{-1} - e^{-1} \\ = 1 - 2e^{-1} //$$

# Τυχαία Μεταβλητές Διαφορετικών Τυπών

(20)

Μερικές φορές χρειάζεται να χειριστούμε δύο κοινές ΤΜ διαφορετικού τύπου, ή μια διακριτή και η άλλη συνεχής.

## Παράδειγμα

Έστω  $X$  η είσοδος ενός επιχειρηματιού ναυαγίου, και  $Y$  η είσοδος του.

Η είσοδος  $X$  είναι  $+1V$  ή  $-1V$  με ίση πιθανότητα. Η είσοδος  $Y = X + N$  ισούται με την είσοδο του δούλου  $N$  ο οποίος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος στο διάστημα  $-2V$  ως  $+2V$ .

Βρείτε  $P[X=1, Y \leq 0]$

Λύση:

$$P[X=1, Y \leq y] = P[Y \leq y | X=1] \cdot P[X=1]$$

όπου  $P[X=1] = \frac{1}{2}$ . Όταν η είσοδος είναι  $X=1$ , η είσοδος  $Y$  είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα  $[1, 3]$ .

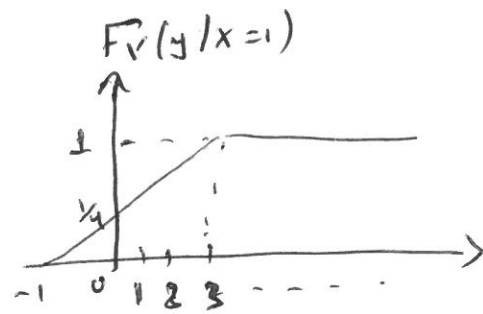
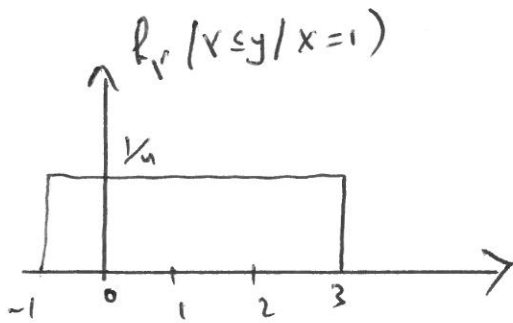
Συνεπώς,

$$P[Y \leq y | X=1] = \frac{y+1}{4}, \quad \text{για } -1 \leq y \leq 3$$

$$\uparrow F_Y(y | X=1)$$

$$\left( F_Y(y | X=1) = \int_{-1}^y \frac{1}{4} dt = \frac{t}{4} \Big|_{-1}^y = \frac{y+1}{4} \right)$$





(21)

'Apo,

$$P[X=1, Y \leq 0] = P[Y \leq 0 | X=1] \cdot P[X=1] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} //$$