

# Αξιοματική Προσέγγιση της Θεωρίας των Πιθανοτήτων

Η θεωρία αποδοθεί:

- (1) Τον χώρο ενός τυχαίου πειράματος και τα δυνατά χρημα  $S$  (το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων (outcomes)  $(\omega)$  ενός τυχαίου πειράματος)
- (2) Καθορισμός των υποσυνόλων του  $S$  (ονομάζονται γεγονότα ή ενδεχόμενα (events))
- (3) Στο κάθε ενδεχόμενο  $A$  αντιστοιχεί η πιθανότητα  $P(A)$  η οποία κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1 σύμφωνα με τα ακόλουθα αξιώματα των πιθανοτήτων (ιδιότητες της σχετικής συχνότητας)
  - (a)  $P(A) \geq 0$
  - (b)  $P(S) = 1$
  - (γ) Αν  $A$  και  $B$  είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα γεγονότα τότε
 
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

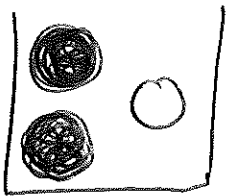
Διότι ο ορισμός της "πιθανότητας ενός γεγονότος" οφείλει να κυμαίνεται με ιδιότητες της σχετικής συχνότητας.

Στον χώρο ενός τυχαίου πειράματος η πρόβλεψη είναι η ανάλυση των αμοιβαίων αποκλειστικών γεγονότων ή σχετικών συχνότητας ενός συγκεκριμένου πειράματος.

## Παράδειγμα (πραγματικό πρόβλημα)

Οι γυμνές σε λειτουργούν συστήματα γυμνών καθε μέσο όρο  $\frac{1}{3}$  του χρόνου. Δηλαδή σε μια συστημική αλλαγή, η πιθανότητα να γυμνός  $P_0 = \frac{1}{3}$  και η πιθανότητα βλάβης  $P_1 = \frac{2}{3}$ .

Μοντέλο: Δοχείο με 3 μπάλες (διαφορετικές μπάλες με ετικέτες)



2 μπάλες - βλάβη  
1 αέρας - οκ.

Αυτό το μοντέλο είναι μεγάλη απλοποίηση (δεν είναι αβυσσός οι γυμνές το ίδιο, δεν γυμνώνουν ίδια μπάλα κλπ). αλλά μας επιτρέπει να αναπαραστήσουμε διαφορετικές σχέσεις με το σχεδιασμό του λειτουργικού συστήματος, κλπ.

Ερώτηση: Με 48 ανεξάρτητες ομύλες, ποια η πιθανότητα ότι περισσότεροι από 24 γυμνών την ίδια ώρα? Αυτό η ερώτηση είναι κομμάτι με την αλγόριθμο:  
Ποια η πιθανότητα να έχουμε πάνω περισσότερες από 24 μπάλες σε 48 ανεξάρτητες επαναλήψεις του δείγματος με το δοχείο με 3 μπάλες?

# Τυχαία Πειράματα (Random Experiments) (3)

Ορισμός: Ένα τυχαίο πείραμα περιγράφεται για  
ωραράτην διατύπωση και ένα σύνολο  
αυτοίς αποτελέσματα (outcomes)

## Παραδείγματα:

- $E_1$ : Εισαγωγή και γώγας γκολ από ένα δοχείο που  
περιέχει 50 αριθμημένες γώγες από 1 έως 50.
- $E_2$ : Ρίξη 3 νομισμάτων και καταγραφή αποτελεσμάτων  
(κορώνα ή γράνα)
- $E_3$ : Ρίξη 3 νομισμάτων και καταγραφή του αριθμού  
των φορών που είχαν γράνα
- $E_4$ : Καταγραφή της διάρκειας ζωής ενός οργανισμού
- $E_5$ : Εισαγωγή αριθμού  $x$  από 0 έως 1. Εισαγωγή  
αριθμού  $y$  από 0 έως 1.

Ορισμός: Το σύνολο των δυνατών (αδανών) αποτελεσμάτων  
ενός πειράματος καλείται Δειγματικός Χώρος (Sample  
Space)

Παραδείγματα

$$S_1 = \{1, \dots, 50\}$$

$$S_2 = \{kkk, kkr, \dots, rrr\}$$

$$S_3 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$S_4 = \{x / x \geq 0\}$$

$$S_5 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Ορισμός: Ένας  $\Delta X$  λέγεται διακριτός (discrete) αν  
ωριμαίνει αριθμητικά (countable) αποτελέσματα. Άλλωστε  
λέγεται συνεχής (Continuous)

(Ορισμός: Ένα σύνολο ονομάζεται αριθμητικό όταν τα στοιχεία  
του (elementary events) μπορούν να έρθουν σε αντιστοιχία  
με τους φυσικούς αριθμούς)

Παραδείγματα

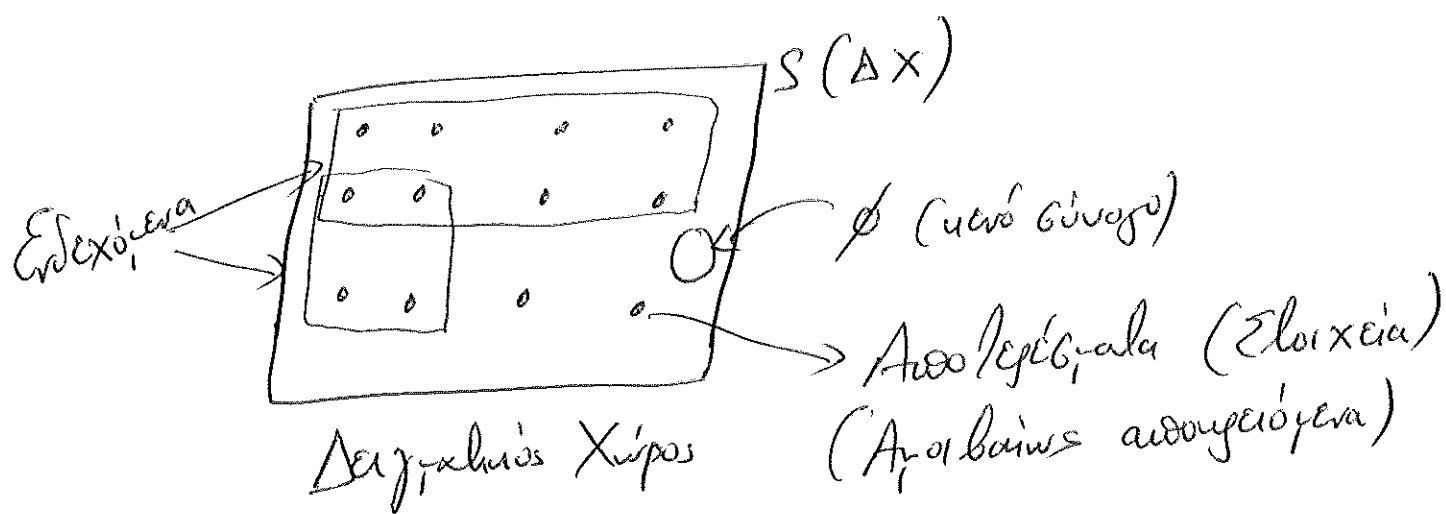
Πεπερασμένος διακριτός  $\Delta X$ :  $S_1, S_2, S_3$

Άπειρος διακριτός  $\Delta X$ :  $\{1, 2, 3, \dots\}$

Συνεχής  $\Delta X$ :  $S_4, S_5$  (2D)

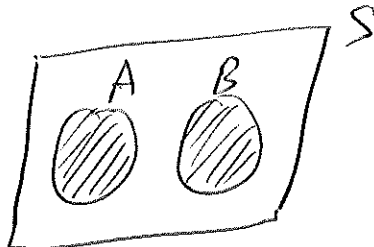
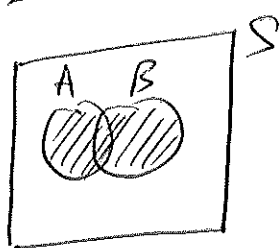
(5)

Ορισμός: Τα υποσύνολα του  $\Delta X$  ονομάζονται  
Ενδεχόμενα ή γεγονότα (events). Ο  $\Delta X$  αποτελεί  
 το βέβαιο γεγονός (certain event) και το κενό σύνολο  
 $\{\}(\emptyset)$  αποτελεί το αδύνατο γεγονός. Τα αποτελέσματα  
 ονομάζονται και στοιχειώδη ενδεχόμενα (elementary events)  
 (στοιχεία)



Ορισμοί: Πράξεις Συνόλων

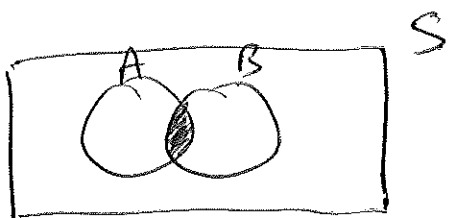
1) Ένωση (Union) Ενδεχομένων:  $A \cup B = \{ \omega \in S : \omega \in A \cup \omega \in B \}$



$$(A \cup B = \{ \omega \in S : \omega \in A \text{ ή } \omega \in B \})$$

Διαγράμματα Venn

2) Τμή (Intersection) Ενδεχομένων:  $A \cap B = \{ \omega \in S : \omega \in A \text{ και } \omega \in B \}$

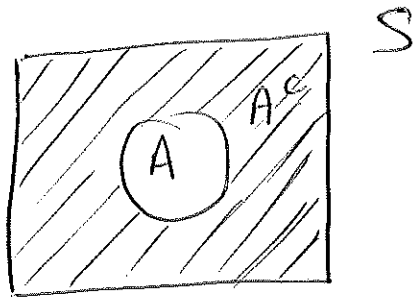


$$(\omega \in A \text{ και } \omega \in B)$$

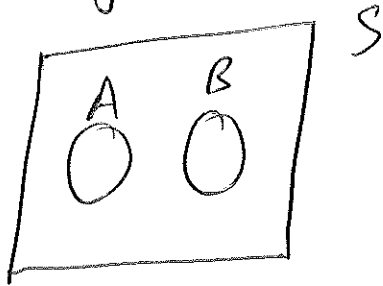
③ Δύο ενδεχόμενα είναι ίσα (equal)  
όταν  $A = B$

⑥

④ Συμπλήρωμα (Complement) του  $A$  είναι το  
 $A^c = \{J \in S : J \notin A\}$ .

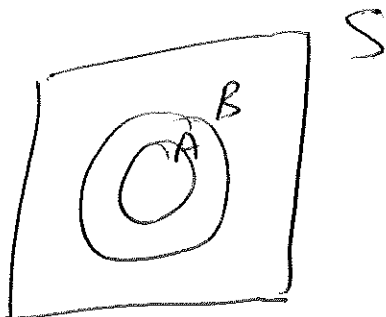


⑤ Δύο ενδεχόμενα  $A, B$  είναι αμοιβαίως κρουόμενα  
(mutually exclusive) όταν  $A \cap B = \emptyset$



Σημείωση: Τα ελαχίστα  
ενδεχόμενα είναι πάντοτε  
αμοιβαίως κρουόμενα.

⑥  $A \subset B = \{J \in S : J \in A \Rightarrow J \in B\}$



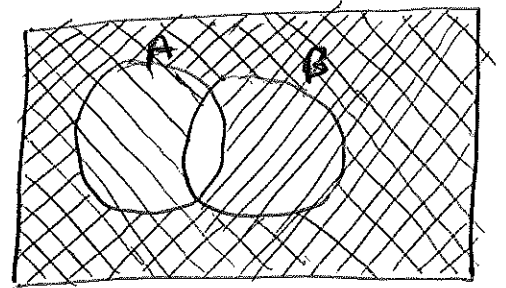
# Ιδιότητες Πράξεων Συνόλων

(7)

- (1) Αντιμεταθετική (Commutative):  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$
- (2) Προσεταιριστική (Associative):  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- (3) Επιμεριστική (Distributive):  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (4) Κανόνες DeMorgan (also Boolean Algebra):

a)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \rightarrow$

b)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \rightarrow$



Παρατήρηση: Η ένωση και η τομή ενοποιούνται και σε περιπτώσεις σύνολα:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \left\{ J \in S : J \in A_k \text{ for some } k \geq 1 \right\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left\{ J \in S : J \in A_k \text{ } \forall k \geq 1 \right\} \quad (\forall = \text{"for all"})$$

(8)

## Αξιώματα των Πιθανολογιών

Ορισμός: Το Μέτρο Πιθανότητας (probability law) είναι μια συνάρτηση (function) που αναθέτει τιμές στα ενδεχόμενα ενός πειράματος, μετρώοντας τα ανόργανα αξιώματα:

$$\textcircled{\text{I}} \quad P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset S \quad (\text{Μη-αρνητικότητα}) \\ (\text{Non-negativity})$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad P(S) = 1 \quad (\text{Κανονικότητα (Normality)})$$

$\textcircled{\text{III}}$  Αν  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  είναι για ανόργανα αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχομένους (δηλ.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  αν  $i \neq j$ ) τότε:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\sigma\text{-additivity})$$

π.χ.  $k=2$  Αν  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  τότε  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Παρατηρήσεις: 1.) Τα αξιώματα I, II, III είναι αρκετά για να αποδείξουμε ότι ισχύει (μαδύσαν άρραφές!)

2.) Μπορούμε να σκεφτόμαστε τις πιθανότητες σαν βάρη (weights)



$$\text{Λήμμα 1: } P(A^c) = 1 - P(A)$$

(9)

$$\text{Απόδειξη: } \underbrace{A^c \cap A = \emptyset}_{\text{αμοιβαία αδιευκρίνιστα}} \Rightarrow P(A) + P(A^c) \stackrel{\text{III}}{=} 1$$

$$P(\underbrace{A \cup A^c}_{\substack{\downarrow \\ S = A \cup A^c}}) \stackrel{\leftarrow \text{ορισμός}}{=} P(S) = 1$$

$$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) //$$

$$\text{Λήμμα 2: } P(A) \leq 1$$

Απόδειξη: Από Λήμμα 1,  $P(A) = 1 - P(A^c) \leq 1$ ,  
γιατί  $P(A^c) \geq 0$  από Αξίωμα (I). Άρα, από Λήμμα 2  
και Αξίωμα I:

$$0 \leq P(A) \leq 1 //$$

$$\text{Λήμμα 3: } P(\emptyset) = 0$$

$$\text{Απόδειξη: Από Λήμμα 1, } P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$\text{Για } A = S \Rightarrow P(S) = 1 - P(S^c) \stackrel{\text{II}}{\Rightarrow} 1 = 1 - P(\emptyset)$$

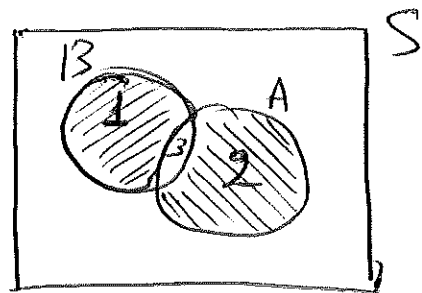
$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0 //$$

(10)

Λήμμα 4:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη:

$$P(A \cup B) = P[(B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (A \cap B)]$$



$$\stackrel{\textcircled{II}}{=} P(B \cap A^c) + P(A \cap B^c) + P(A \cap B) - \textcircled{1}$$

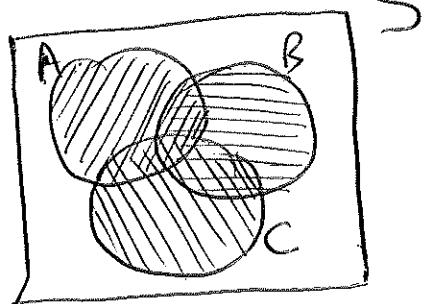
$$P(A) = P((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) \stackrel{\textcircled{II}}{=} P(A \cap B^c) + P(A \cap B) - \textcircled{2}$$

$$P(B) = P((B \cap A^c) \cup (B \cap A)) \stackrel{\textcircled{II}}{=} P(B \cap A^c) + P(A \cap B) - \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} &\Rightarrow P(A \cup B) = \underbrace{P(A)}_{\text{από } \textcircled{2}} - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{από } \textcircled{3}} + \underbrace{P(B)}_{\text{από } \textcircled{3}} - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{από } \textcircled{3}} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) // \end{aligned}$$

Από Λήμμα 4:  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$  (Πόλημα 5)

Επίσης:  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



## Λήμμα 6 (Πιο γενικά)

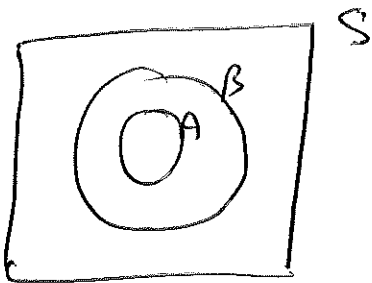
11

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Απόδειξη: (By Induction)

Λήμμα 7: Αν  $A \subset B$ , τότε  $P(A) \leq P(B)$



$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη: } P(B) &= P(A) + \underbrace{P(B \cap A^c)}_{\geq 0 \text{ (Αξίωμα I)}} \\ &\geq P(A) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$$