

Αυτονομία Πειραμάτων

Α) Αυτονομία Ανεξάρτητων Πειραμάτων

Έχουμε ένα πείραμα που αποτελείται από τα υποπείραματα E_1, E_2, \dots, E_n με ΔX S_1, S_2, \dots, S_n αντίστοιχα. Ο ΔX των πειραμάτων είναι το καρτεσιανό γινόμενο $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ και τα αποτελέσματα είναι τις τριπλές $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$. Τα υποπείραματα χαρακτηρίζονται ανεξάρτητα αν

$$\forall A_1 \subset S_1, A_2 \subset S_2, \dots, A_n \subset S_n$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

↓
Μέθοδος ορισμού των ελλειδών πειραμάτων

↓
Μέθοδος ορισμού των ορίων πειραμάτων
Μέθοδος ορισμού των δειγμάτων πειραμάτων

Ορισμός: Πείραμα Bernoulli χαρακτηρίζεται ένα τυχαίο πείραμα με δύο μόνο δυνατά αποτελέσματα: 1) Εξόδυα, με πιθανότητα p , και 2) Αποδύα, με πιθανότητα $1-p$.

(Παράδειγμα: Ρίψη δυνάμει νομίσματος)
(Παράδειγμα: Pass/Fail σε μια εξέταση)

(2)

Θεώρημα: Έστω η ανεξάρτητα δοκιμάζα Bernoulli, το να δίνει αν λειτουργεί με πιθανότητα επιτυχίας p . Η δοκιμάζα να έχει n επαναλήψεις. Δίνοντας το Διωνυμικό Μέτρο Πιθανότητας:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n$$

(π.χ. $\begin{matrix} 0011 \\ 1100 \\ 1010 \\ 0101 \\ 1001 \\ 0110 \end{matrix}$ $P_4(2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$)

Απόδειξη: Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ αποτελέσματα με k επιτυχίες. Κάθε ένα από αυτά έχει πιθανότητα $p^k (1-p)^{n-k}$. Συνεπώς, το ενδεχόμενο να έχουμε ακριβώς k επιτυχίες έχει πιθανότητα το άθροισμα των $\binom{n}{k}$ αποτελεσμάτων:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Παρατήρηση: Το Διωνυμικό Θεώρημα ορίζει ότι

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

• Αν δώσουμε $a=p$ και $b=1-p$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 \quad \left((a+b)^n = (p+1-p)^n = 1 \right)$$

• Αν δώσουμε $a=b=1$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Παράδειγμα

(3)

Ένα υαλοβόξιο θα βυθίσει ένα σπινάκι 2 ή περισσότερες φορές χτυπώντας το σπινάκι.

Αν το υαλοβόξιο επιλογίζει 3 φορές υαλ:

$P(\text{χτυπεί το σπινάκι}) = 0.4$ για ένα υαλ ή για, ποια είναι η πιθανότητα το σπινάκι να βυθιστεί?

$$P(0 \text{ χτυπήματα}) = \binom{3}{0} (0.4)^0 (1-0.4)^3 = 0.216$$

$$P(1 \text{ χτυπήματα}) = \binom{3}{1} (0.4)^1 (1-0.4)^2 = 0.432$$

$$P(2 \text{ χτυπήματα}) = \binom{3}{2} (0.4)^2 (1-0.4)^1 = 0.288$$

$$P(3 \text{ χτυπήματα}) = \binom{3}{3} (0.4)^3 (1-0.4)^0 = 0.064$$

$$P(\text{βυθίζεται}) = P(2 \text{ χτυπήματα}) + P(3 \text{ χτυπήματα}) = 0.352 //$$

Πολλαωνόμοιο Θεώρημα (Multinomial Probability Law)

Έστω διαίρεση B_1, B_2, \dots, B_M του ΔX ενός διαρίχματος E , με $P[B_1] = p_1, P[B_2] = p_2, \dots, P[B_M] = p_M$, με $p_1 + p_2 + \dots + p_M = 1$. Έστω ότι επιλογίζε η ανεξάρτητες επαναλήψεις του διαρίχματος. Η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο B_1 k_1 φορές, το ενδεχόμενο B_2 k_2 φορές, κ.ο.κ. όπου $k_1 + k_2 + \dots + k_M = n$, είναι

$$P_n[(k_1, k_2, \dots, k_M)] = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_M!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_M^{k_M}$$

$$\left(\text{Διωνυσίου Όαρημα: } n=2 \quad p_1=p, \quad p_2=(1-p) \quad \begin{matrix} k_1=k, \quad k_2=n-k \end{matrix} \right) \quad (4)$$

Γενικευμένο Μέθοδο Πιθανότητας

Έστω αλ ελέγναι-ε διαδοχικά ωαράαα Bernoulli, έχρι
να έχα-ε για έαληαία. Η διααόαα να γιναν
αυρίως m ωαράαα είναι:

$$P_m = P(\underbrace{A_1, A_2, \dots, A_{m-1}}_{\text{αααααααα}}, \underbrace{E_m}_{\text{έαληαία}}) \stackrel{\text{Αεα.}}{=} P(A_1)P(A_2) \dots P(A_{m-1})P(E_m)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_m = (1-p)^{m-1} \cdot p \quad m=1, 2, \dots}$$

Παράαρηαα: (A) $\sum_{m=0}^{\infty} P_m = p \sum_{m=1}^{\infty} (1-p)^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

$\Rightarrow (P(\text{"έωααίγα-ε 1α ωαράαα αα' έαααα"})) = 0)$

$$(B) P\{m > k\} = \sum_{m=k+1}^{\infty} P_m (1-p)^{m-1} = p(1-p)^k \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i$$

$$= \frac{p(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k //$$

Χρήααοι Τίαα

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = \frac{1}{1-\alpha} \quad (\alpha < 1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i = \alpha + \alpha^2 + \dots = \alpha(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (\alpha < 1)$$

③ Ανοσώδεις Εφαρμογές Περαιμάτων

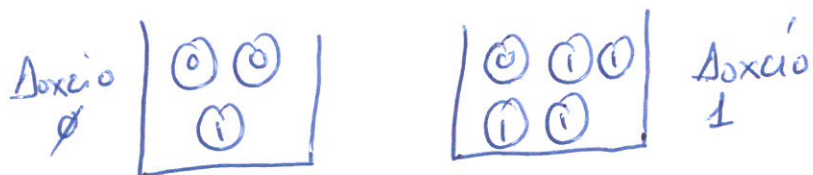
⑤

Ορισμός: Μία ανοσώδεια περαιώσεων E_1, E_2, \dots καλείται
Αλυσίδα Markov (Markov chain) αν $\forall A_1 \in E_1, A_2 \in E_2, \dots$
 $A_n \in E_n,$

$$P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}) = P(A_n | \underbrace{A_{n-1}}_{\substack{\text{είναι το} \\ \text{προηγούμενο} \\ \text{δοσμένο το} \\ A_n}})$$

Παράδειγμα

Το δοχείο \emptyset έχει για γωάκια με τον αριθμό 1 και δύο γωάκια με τον αριθμό \emptyset . Το δοχείο 1 έχει για γωάκια με τον αριθμό \emptyset και η γωάκια με τον αριθμό 1:



Ενέργειες που επίς ανοσώδεια περαιώσεων

- 1) Επιδράστε ένα δοχείο στο λίκυ (δίνουμε εισροή)
- 2) Επιδράστε για γωάκια στο δοχείο, Έστω i ο αριθμός της. (Μετά την εισαγωγή)
- 3) Επιδράστε το δοχείο i .
- 4) Πάτε στο βήμα 2)

Έστω Δ_i το γεγονός ότι i -οστό είναι άρτιο.
 Τότε για να πάρουμε, ποια η πιθανότητα να
 έχουμε

$$\Delta_1=0, \Delta_2=0, \Delta_3=1, \Delta_4=1 ?$$

16x4 για
 4x4 για
 4x4 για

Πίση: $P(\Delta_1=0 \cap \Delta_2=0 \cap \Delta_3=1 \cap \Delta_4=1) =$

$$P(\Delta_4=1 / \Delta_3=1 \cap \Delta_2=0 \cap \Delta_1=0) \cdot P(\Delta_3=1 / \Delta_2=0 \cap \Delta_1=0)$$

$$\cdot P(\Delta_2=0 / \Delta_1=0)$$

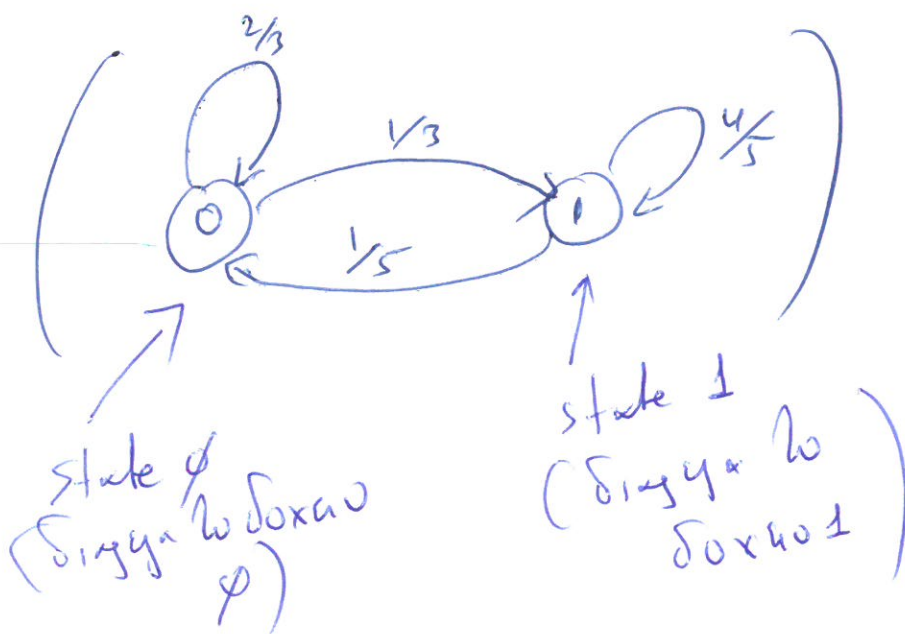
$$\cdot P(\Delta_1=0)$$

Markov

$$= P(\Delta_4=1 / \Delta_3=1) \cdot P(\Delta_3=1 / \Delta_2=0) \cdot$$

$$P(\Delta_2=0 / \Delta_1=0) \cdot P(\Delta_1=0)$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{45} //$$



ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (Random Variables)

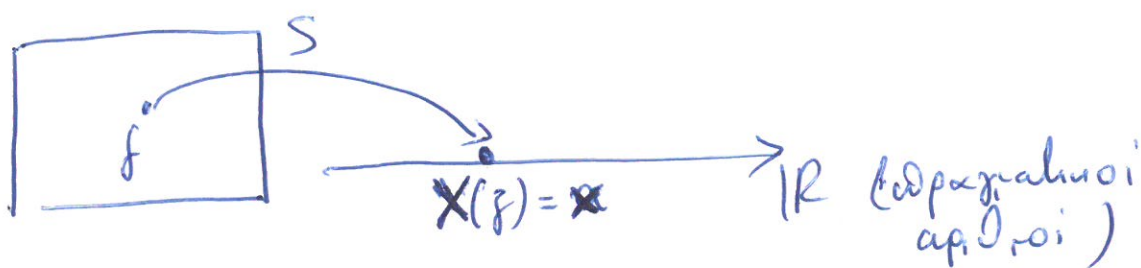
(7)

Ορισμός: Έστω S ΔX με μέτρο πιθανότητας P .

Μια συμπίκνωση $X: S \rightarrow S_X \subset \mathbb{R}$ με εδίο ορισμού (domain) το S και εδίο τιμών (range) το $S_X \subset \mathbb{R}$ καλείται τυχαία μεταβλητή

πραγματικοί αριθμοί (real numbers)

(τυχαία μεταβλητή X είναι μια συμπίκνωση η οποία "υδατίζει" (maps) από τα στοιχεία του S σε ΔX στο εδίο τιμών των πραγματικών αριθμών)



Παράδειγμα: Έστω S ο ΔX να συμπραχτεί από τις 3 κερφάλων και έστω X ο αριθμός των γραττίνων

$S = \{ \text{γγγ}, \text{γκκ}, \text{γκγ}, \text{γκκ}, \text{κγγ}, \text{κγκ}, \text{κκγ}, \text{κκκ} \}$

$X(z) = ?$

$f: \text{γγγ}, \text{γκκ}, \text{γκγ}, \text{γκκ}, \text{κγγ}, \text{κγκ}, \text{κκγ}, \text{κκκ}$

$X(z) = 3, 2, 2, 1, 2, 1, 0, 0$

$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

Παρατήρηση

Ο ορος luxαία γειάβγλη είναι misnomer (δεν αφορίζει
κατά το νόημα). Η luxαία γειάβγλη είναι για
προσδιοριστική συνάρτηση πάνω στο Δx . Η luxαία
είναι η εξήγηση από την luxαία του αποτελέσματος
(ωστέ αραξεί τον Δx S)

Παράδειγμα: Έστω ότι οι πίτες τα αποτελέσματα
αποτελέσματα είναι δυναμικά και ανεξάρτητα

$$P[X=0] = P[\{\kappa\kappa\kappa\}] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P[X=1] = P[\{\kappa\kappa\Gamma, \kappa\Gamma\kappa, \Gamma\kappa\kappa\}] \stackrel{\text{Αξ. III}}{=} P[\{\kappa\kappa\Gamma\}] + P[\{\kappa\Gamma\kappa\}] + P[\{\Gamma\kappa\kappa\}] = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P[X=2] = P[\{\kappa\Gamma\Gamma, \Gamma\kappa\Gamma, \Gamma\Gamma\kappa\}] \stackrel{\text{Αξ. III}}{=} P[\{\kappa\Gamma\Gamma\}] + P[\{\Gamma\kappa\Gamma\}] + P[\{\Gamma\Gamma\kappa\}] = \frac{3}{8}$$

$$P[X=3] = P[\{\Gamma\Gamma\Gamma\}] = \frac{1}{8}$$

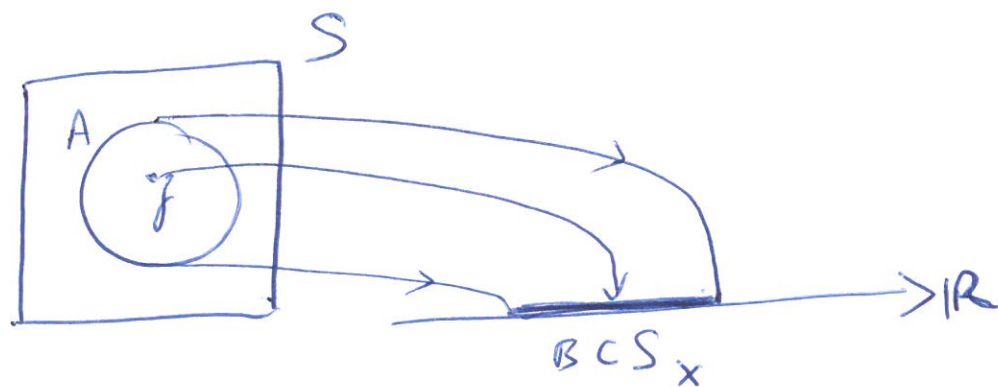
Παρατήρηση: Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για τις luxαίες X ,
μπορούμε να αγνοήσουμε το αρχικό δείγμα και να
υποθέσουμε ότι ο δείγμα χρονός είναι ο S_X
με κέρδη αποτελέσματα, $P_j = P[X=j]$, $j=0,1,2,3$

Πιο γενικά: Έστω ομοιομορφικό ενδεχόμενο ⑨

$B \subset S_X$. Έστω το ενδεχόμενο $A = \{\xi: X(\xi) \in B\}$.

Τότε, το ενδεχόμενο $B \subset S_X$ ισχύει όταν το ενδεχόμενο $A \subset S$ ισχύει. Δηλαδή,

$$P[B] = P[A] = P[\{\xi: X(\xi) \in B\}]$$



$$\left(\begin{aligned} \text{π.χ } P[B] &= P[\{x \in [1,2]\}] = P[x=1] + P[x=2] = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \\ P[A] &= P[\{\kappa\kappa, \dots, \kappa\kappa\}] = \frac{3+3}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned} \right)$$

Με τον πιο πάνω τρόπο ελέγχουμε ένα γέρο σιδαιόβιλο
 γέ ενα $\Delta X \ S_X$, χρησιμοποιώντας το γέρο σιδαιόβιλο
 όλων $\Delta X \ S$.

Ορισμός: Τα A, B ονομάζονται ισοδύναμα ενδεχόμενα.

Σημείωση: Αν το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος
 είναι αριθμός τότε μπορούμε να γράψουμε απλά
 για τυχαία γέροβιλο ΔX ορίζουμε $X(\xi) = \xi$
 (π.χ γέρο Θ αποτέλεσμα ενός πειράματος)

Άλλα Παραδείγματα ΤΜ

(1) Πριν γαρίω και κέρταλος:

$$S = \{(k, 1), (k, 2), \dots, (r, 6)\}$$

Έστω ότι η ΤΜ είναι η συνάρτηση X έτσι ώστε

(a) Αν γέρουσε $k \rightarrow$ δίνει k γάρια $\text{for } X = \# \text{ γαρίω}$

(b) Αν γέρουσε $r \rightarrow$ αφαίρει k γάρια $\text{for } X = 2X - \# \text{ γαρίω}$

$\Rightarrow X$ "γέρουσε" (αυξανόμενη-maps) $\text{to } S$ (12 στοιχεία)
 σε 12 γάρια από το -12 μέχρι το 6.

