

Ερωτήρια Παράδειγματα Πιθανοτήτων

- ① 6 άνδρες  
9 γυναίκες  
5-μερής επιτροπή  
E: 3 άνδρες, 2 γυναίκες

$$P(E) = \frac{\binom{6}{3} \binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

- ② n γωαίτες  
1 ειδική γωαίτα  
E: k γωαίτες γκ τον ειδική  
γωαίτα γέβα

$$P(E) = \frac{\binom{1}{1} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n} = \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-(k-1)}\right) \right]$$

- ③ Παράδειγμα: n κοινές γωαίτες  
m γωαίτες  
E:  $k_1, k_2, \dots, k_n, m_1, m_2, \dots, m_m$

(2)

$$P(E) = \frac{n! \cdot m!}{(n+m)!} \rightarrow \frac{|E|}{|S|}$$

n.x 2 κόκκοι :  $K_1, K_2$   
 2 τσέρ :  $M_1, M_2$

$K_1 K_2 M_1 M_2$

$K_2 K_1 M_1 M_2$

$K_1 K_2 M_2 M_1$

$K_2 K_1 M_2 M_1$

$$P(E) = \frac{4}{4!} = \frac{1}{6}$$

④ Poker  
 52 χαρτιά

E: straight (5 συνεχόμενα χαρτιά ανεξάρτητα φύλλο)

$$\left. \begin{aligned} |S| &= \binom{52}{5} \\ E &= 10(4^5 - 4) \end{aligned} \right\} P(E) = \frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}}$$

↳ όχι ομαλός ιδίος φύλλο (straight flush)

⑤ Poker  
 52 χαρτιά

Χρυσά: 5 χαρτιά με ίδιο φύλλο

$$\left. \begin{aligned} |S| &= \binom{52}{5} \\ E &= \binom{4}{1} \binom{13}{5} \end{aligned} \right\} P(E) = \frac{\binom{4}{1} \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

(3)

- 6 10 βιβλία  
 4 παιδικά } E:  
 3 χυρία } Όσο να βάζω τα βιβλία πάνω  
 2 ισόπια } στον βιβλιοθήκη από βιβλία για  
 1 γραβία } το ίδιο όσο πρέπει να είναι μαζί

$$|S| = 10!$$

$$|E| = 4! \cdot (4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!)$$

$$P(E) = \frac{4! (4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!)}{10!}$$

7 5 άντρες

7 γυναίκες

Ε: Πιθανότητα να συμπληρώσει εργασία από 2 άντρες  
 και 3 γυναίκες.

$$|S| = \binom{12}{5} \quad |E| = \binom{5}{2} \binom{7}{3} \quad P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

8 E: 2 γυναίκες λαμβάνοντας και δεν πρέπει να  
 είναι σε μια εργασία μαζί. Ποιές η πιθανότητα  
 να συμπληρώσει εργασία από 2 άντρες και  
 3 γυναίκες.

$$|S| = \binom{12}{5} \quad \binom{2}{0} \binom{5}{3}$$

$$\binom{2}{1} \binom{5}{2}$$

Πιθανότητες από 3 γυναίκες  
 να δεν περιέχουν καμία από  
 τις 2 γυναίκες να λαμβάνονται

από 3 γυναίκες  
 να περιέχουν ακριβώς 1  
 από τις 2 γυναίκες να  
 λαμβάνονται

$$\Rightarrow |E| = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (4)$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

(9) n άτομα

$A$  = γεγονός ότι παρ'αίτιον (at least) 2 άτομα έχουν την ίδια ημερομηνία γενεθλίων.

$\bar{A}$  = να ένας δεν έχει την ίδια ημερομηνία γενεθλίων.

$$|S| = (365)^n$$

$$|\bar{A}| = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)$$

$$P(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|S|} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$\Rightarrow P(A) = \begin{cases} 0.51 & n=23 \\ 0.99 & n=55 \end{cases}$$



# 10 (The matching problem)

5

$N$  άνθρωποι ( $A_1, \dots, A_N$ )

$N$  καρέζες

Τα πιάνουν σε ένα ναυτί και μετά διατίθενται στην

$E$ : κανένας δεν παίρνει το <sup>δουλειά</sup>  $\hat{\text{καρέζα}}$ .

$E^c$ : τουλάχιστον ένας παίρνει το καρέζα του.

$E_i$ : Ο άνθρωπος  $A_i$  διατίθει το καρέζα του

$$P(E^c) = P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = \sum_{i=1}^N P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2})$$

$$+ \sum_{i_1 < i_2 < i_3} P(E_{i_1} E_{i_2} E_{i_3}) - \dots + (-1)^{N+1} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_N})$$

(τουλάχιστον ένας άνθρωπος διατίθει το <sup>δουλειά</sup>  $\hat{\text{καρέζα}}$ )

$$P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_j}) = (N-j)(N-j+1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (\text{ο καθένας πάρει})$$

$$= \frac{(N-j)!}{N!} \left( \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \dots \frac{1}{N-j+1} \right)$$

$$\left( \sum P(E_{i_1} \dots E_{i_j}) = \frac{1}{j!} \right)$$

$$\Rightarrow P(E^c) = N \cdot \frac{1}{N} - \binom{N}{2} \frac{(N-2)!}{N!} + \binom{N}{3} \frac{(N-3)!}{N!} - \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}$$

$$P(E) = 1 - P(E^c) \approx e^{-1} \approx 0.36788 \quad \text{για μεγάλο } N.$$

# Δεδομένη Πιθανότητα

(6)

Ορισμός: Έστω δύο ενδεχόμενα  $A, B$ , με  $P(B) > 0$ .

Η Δεδομένη Πιθανότητα (ή υπό συνθήκη πιθανότητα) (Conditional probability) του  $A$  δεδομένου του ενδεχομένου  $B$  ορίζεται ως:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

γράφεται επίσης ως:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

και ερμηνεύεται ως πιθανότητα να συμβεί το  $A$ , αν έχουμε ως παραπορία ότι συνέβη το  $B$ .

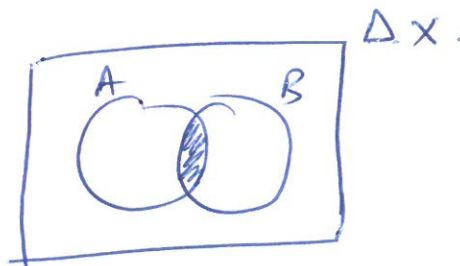
Διαδικασία Απολογισμού του ορισμού: Έστω ότι ένα δείγμα επιλεγεί  $n$  φορές. Από αυτές,  $n_A$  φορές απονέμεται το ενδεχόμενο  $A$ , και ομοίως ορίζεται το  $n_{A \cap B}$  και  $n_B$ .

Τότε:

$$P(A) \sim \frac{n_A}{n}, \quad P(B) \sim \frac{n_B}{n}, \quad P(A \cap B) \sim \frac{n_{A \cap B}}{n}$$

$$P(A|B) \sim \frac{n_{A \cap B}}{n_B}, \text{ συνεπώς}$$

$$\rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Παραδειγμα

Μια οικογένεια έχει 2 παιδιά. Έστω τα ενδεχόμενα

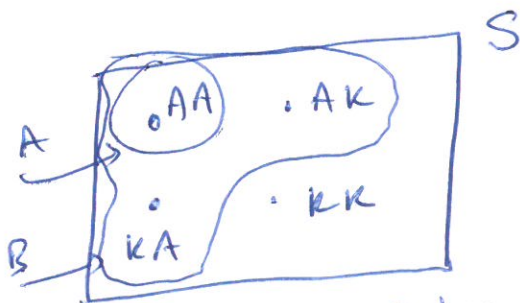
$A = \{\text{ηταν τα δυο αγόρια}\}$  και  $B = \{\text{υπαρχει παιδικό έγκ αγόρι}\}$

$S = \{AA, AK, KA, KK\}$  → είναι σφοφανές ότι  $ACB$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{ACB} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

↳ συμπέρασμα ότι  
το "B" είναι γεγονός

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = \{AA\} \\ B = \{AA, AK, KA\} \end{array} \right\} P(A|B) = \frac{P(\{AA\})}{P(\{AA, AK, KA\})} = \frac{1}{3}$$



(Είναι σαν να πείναμε  
τον ΔΧ)

Παρατηρήσεις:

- Αν  $B \subset A$ ,  $P(A \cap B) = P(B)$   
 $\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$   
 $\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$

- Αν  $A \cap B = \emptyset$ ,  $P(A|B) = 0$

- Η θεωρητική πιθανότητα υπολογίζει  
τα αληθινά των πιθανοτήτων.



## Χρήσιμα Τύποι

8

$$\begin{aligned} 1. \quad P(A \cap B) &= P(A|B) \cdot P(B) \\ 2. \quad P(A \cap B) &= P(B|A) \cdot P(A) \end{aligned} \left\} \rightarrow P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Πολλές φορές η φυσική των προβλημάτων είναι τέτοια να συμπεριφέρει δεδομένες ειδικότητες!

## Ερωτήρια Παραδείγματα

① <sup>Πίχτων</sup> Ένα νόμισμα 2 φορές. Ποιά είναι η ειδικότητα ότι και τις δύο φορές έχω Κ, υπό την προϋπόθεση ότι την πρώτη φορά έχω Κ?

$\Rightarrow A = \{(K, K)\}$  γεγονός ότι και τις δύο φορές έχω Κ.  
 $B = \{(K, K), (K, Γ)\}$  γεγονός ότι την πρώτη φορά έχω Κ.

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\{(K, K)\}}{P\{(K, K), (K, Γ)\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$|S| = \{(K, K), (K, Γ), (Γ, K), (Γ, Γ)\}.$$

② Ένα νομίσμα περιέχει 10 γαίες γωάρες, 5 υιόριες γωάρες, και 10 άσπρες γωάρες.  
Μια γωάρα διαλέγεται από την τιάχη και δεν είναι γωάρα.  
Ποιά η ειδικότητα ότι είναι υιόριος?

$K$  - γεγονός ότι είναι υιόριος

$M^c$  - γεγονός ότι δεν είναι γωάρα



$$\Rightarrow P(K/M^c) = \frac{P(KM^c)}{P(M^c)}$$

9

$KM^c = K$  εφωδι' η γωδισα δα είναι και μελπωρ και οχι γωρ αν είναι μελπωρ!

$$\Rightarrow P(K/M^c) = \frac{P(K)}{P(M^c)} = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{1}{3} //$$

η ανωδισας αωδω λωv Δx:  $P(K/M^c) = \frac{5}{15}$  (οχι Μωρωv => 15 γωδισες (Δx) και 5 είναι μελπωρ)

③ Ένα κωλι έχει 8 κώμωωω και 4 αώωωω γωδισες. Τρωαώωω 2 γωδισες (χωρís εωαώωωωωω). Ποω είναι η ωωδωωωωωω ωλι και οι δωω δα είναι κώμωωωω? ( $P(K_1, K_2)$ )

$$\left. \begin{array}{l} P(K_2/K_1) = \frac{7}{11} \\ P(K_1) = \frac{8}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow P(K_1, K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2/K_1) = \frac{14}{33} //$$

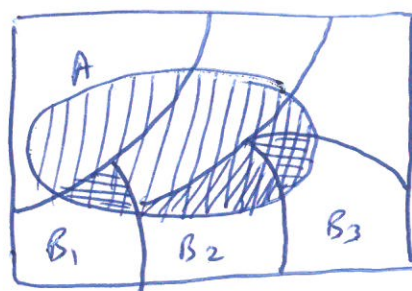
$$\eta \quad P(K_1, K_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{8!}{6! \cdot 2!}}{\frac{12!}{10! \cdot 2!}} = \frac{8! \cdot 10!}{6! \cdot 12!}$$

$$= \frac{8!}{6! \cdot 11 \cdot 12} = \frac{7 \cdot 8^2}{11 \cdot 12 \cdot 3} = \frac{14}{33} //$$

Ορισμός: Έστω  $B_1, B_2, \dots, B_n$  αυτοαίτιες αντιστοιχία  
 σύνολα, τέτοια ώστε  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$ . Τα  $B_1, B_2, \dots, B_n$   
 ονομάζονται διαίρεση (partition) του  $S$ .

Θεώρημα της Οριστικής Πιθανότητας: Έστω  $B_1, B_2, \dots, B_n$   
 διαίρεση και ενδεχόμενο  $A$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap S) = P(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)) \\ &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)) \end{aligned}$$



Αξίωμα III

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

$$\left( P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) \text{ where } \sum_i B_i = S \right)$$

### Παράδειγμα

① Το 40% των κίτρων ποτισμένων και το 10% των κίτρων ανδρών έχουν γαρδια γαρτιά. Ποιά η πιθανότητα ένα άτομο από τον κήπο να έχει γαρδια γαρτιά?

Λύση:  $P(\text{γαρδια γαρτιά}) = P(\Xi/A) \cdot P(A) + P(\Xi/r) \cdot P(r)$   
 Έστω  $P(A) = P(r) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\Xi) = \frac{1}{2} \cdot 40\% + \frac{1}{2} \cdot 10\% = \frac{1}{4}$ .

② Μια αλφαιδίνη ελπίδα ξεχωρίζει χέλι (11)  
 ανθρώπων που είναι ερωτηθέντες σε αλφαιδίνη (X) και ανθρώπων  
 που δεν είναι (Y)

X -  $p = 0.4$  οι 4α έχουν αλφαιδίνη, ίσα σε διάστημα  
 ενός χρόνου

Y -  $p = 0.2$  ———— || ————

X - 30% λα βουνο

Y - 70% ————

$P(\text{ανταίριαξη αλφαιδίνης 4α έχει ένα αλφαιδίνη ίσα σε διάστημα  
 ενός χρόνου}) = P(A|X) = P(A)$

$$P(A) = P(A/X)P(X) + P(A/Y) \cdot P(Y) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.26 //$$

③ Υποθέτουμε ότι είχε αλφαιδίνη. Ποια η πιθανότητα  
 ότι ανίχνευσε την κατάσταση των ανθρώπων που είναι  
 ερωτηθέντες σε αλφαιδίνη.

$$P(X/A) = \frac{P(XA)}{P(A)} = \frac{P(A/X) \cdot P(X)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.26}$$

$$= \frac{6}{13} //$$



## Θεώρημα του Bayes' (Bayes' Theorem)

(12)

Έστω  $B_1, B_2, \dots, B_n$  διαίρεση του  $\Delta \times S$ , και  
ενδεχόμενο  $A$ .

$$\underbrace{P(B_j/A)}_{\text{"a-posteriori"}} = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{k=1}^n P(A/B_k) \cdot P(B_k)}$$

Ο  $\lambda$ ίγος έχει επαφίγν' σε περιπτώσεις αν τα  $B_j$  είναι  
όσα τα δυνατά αποτελέσματα για διαδινάγια, και το  $A$   
αποτελεί "υποπόρεια" (αποσείπα) αν λαντά να αποφανεί  
η ανείβη. ( $P(A) > 0$  και  $S = \sum_j B_j$ )

Απόδειξη:

Απο λιν υο προποόδεν ανανόλνλα  $P(A)P(B_i/A) = P(A/B_i)$   
(εάνν και οι δυο γίγρες ίανλν τε  $P(A \cap B_i)$ )  
για ανόο  $i$   $P(B_i)$

$\Rightarrow$

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} \quad (P(A) > 0)$$

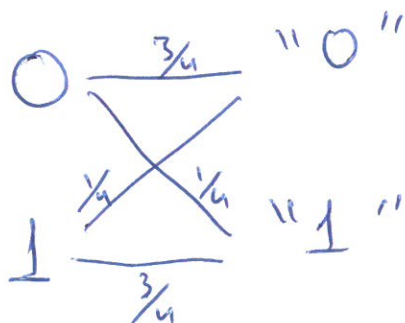
$$= \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_j P(A/B_j) \cdot P(B_j)} \rightarrow \text{ορίν ανανόλνλα}$$

(  $P(B_i)$  - "prior" ανανόλνλα  
 $P(B_i/A)$  - "posterior" ανανόλνλα )

## Παράδειγμα

13

① Δυαδικό Συγγεγραμμένο Κανάλι.



$$P("0"/0) = \frac{3}{4}$$

$$P("1"/0) = \frac{1}{4}$$

$$P("0"/1) = \frac{1}{4}$$

$$P("1"/1) = \frac{3}{4}$$

$$P("0") = P(0) \cdot \frac{3}{4} + P(1) \cdot \frac{1}{4}$$

$$P("1") = P(0) \cdot \frac{1}{4} + P(1) \cdot \frac{3}{4}$$

$$P(0/"0") = \frac{P(0 \cap "0")}{P("0")} = \frac{P(0) \cdot \frac{3}{4}}{P(0) \cdot \frac{3}{4} + P(1) \cdot \frac{1}{4}}$$

Αν  $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$  τότε  $P(0/"0") = \frac{3}{4}$   
 $P(1/"0") = \frac{1}{4}$

Για να  $P(0)$  αυξομειώνεται

$$\frac{P(0) \cdot \frac{3}{4}}{P(0) \cdot \frac{3}{4} + (1 - P(0)) \cdot \frac{1}{4}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} P(0) < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} P(0)$$
$$\Rightarrow P(0) < \frac{1}{4}$$

② Έξοχος διακόπτης: Σχεδιασμός που οι αποφασιστικές δελ αυτονόμο.

14

T - η μηχανή έχει πρόβλημα

O - το φως ανάβει

$$\begin{aligned} P(O/T) &= p_1 \\ P(\bar{O}/\bar{T}) &= p_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Όπως αυτές οι πιθανότητες να} \\ \text{είναι κοντά στο 1} \end{array} \right.$$

$$P(T) = \theta \quad (\text{αυτο ελεγχεται})$$

$$P(T/O) \text{ και } P(T/\bar{O}) = ? \quad \left( \begin{array}{l} \text{δε ξέρω} \\ \text{γέ το } p_1, p_2, \theta \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow P(T/O) = \frac{P(T \cap O)}{P(O)} = \frac{P(O/T) \cdot P(T)}{P(O)}$$

$$= \frac{P(O/T) \cdot P(T)}{P(O/T) \cdot P(T) + P(O/\bar{T}) \cdot P(\bar{T})} = \frac{p_1 \theta}{p_1 \theta + (1-\theta)(1-p_2)}$$

$$P(T/\bar{O}) = \frac{P(\bar{O}/T) \cdot P(T)}{P(\bar{O}/T) \cdot P(T) + P(\bar{O}/\bar{T}) \cdot P(\bar{T})}$$

$$= \frac{(1-p_1)\theta}{(1-p_1)\theta + (1-\theta)p_2}$$

Εαν θέσω το  $P(T/O) = 0.99$  και το  $P(T/\bar{O}) = 0.01$

$$\text{και γέ } \theta = 10\% \Rightarrow \begin{aligned} p_1 &= 99.099\% \\ p_2 &= 99.989\% \end{aligned}$$



## Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

15

Ορισμός: Δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα αν, γνωρίζοντας ότι συνέβη το ένα, δεν αγγίζουν οι πιθανότητες να συμβεί το άλλο:

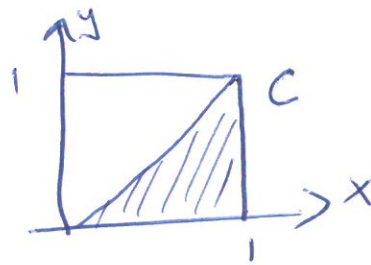
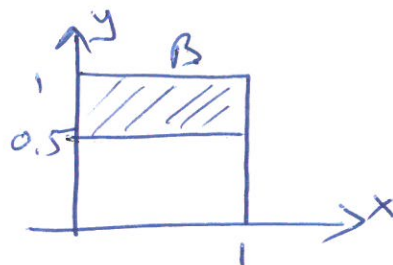
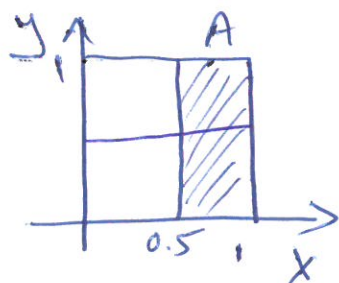
$$P(A|B) = P(A) \iff \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)} \iff P(B|A) = P(B)$$
$$\rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Παρατηρήσεις: ① Δύο απολύτως αμοιβαία ενδεχόμενα με μη μηδενικές πιθανότητες δεν είναι ποτέ ανεξάρτητα:

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0, \text{ αλλά } P(A)P(B) > 0$$

② Η  $P(A)$  επιρρέει το ποσοστό που έχει το ενδεχόμενο GE όσο τον διαγινώχνει χώρο. Το  $P(A|B)$  επιρρέει το ποσοστό που έχει το A στο B (όχι μωρίς Δx). Για να έχουμε ανεξαρτησία τα ποσοστά αυτά πρέπει να είναι ίσα.

Παράδειγμα: Εστιάσουμε ένα γινος  $(x, y)$   
 στο  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Έστω τα ενδεχόμενα  
 $A = \{x > 0.5\}$ ,  $B = \{y > 0.5\}$ ,  $C = \{x > y\}$



Ορισμός: Τρία ενδεχόμενα  $A, B, C$  καλούνται ανεξάρτητα αν  
 είναι ανεξάρτητα ανά δύο και επιπλέον  
 $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

(Δεν αρκεί τα  $A, B, C$  να είναι ανεξάρτητα ανά δύο)

Ορισμός:  $n$  ενδεχόμενα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  καλούνται  
 ανεξάρτητα αν γινώσκοντας οποιαδήποτε από αυτά δεν  
 αφήνει ίσως πιθανότητα να συμβούν οποιαδήποτε  
 από τα υπόλοιπα:

$$\forall k \leq n \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n,$$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})P(A_{i_3}) \dots P(A_{i_k})$$

## Παραδείγματα

- ① Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρρα 3 φορές. Οι ρίξεις είναι ανεξάρτητες. Ποια η πιθανότητα να έχουμε 3 κορώνα?

$$P("3 κορώνα") = P\left(\bigcap_{i=1}^3 "Η ρίξη είναι κορώνα"\right)$$

Αντ.  $\prod_{i=1}^3 P("Η ρίξη είναι κορώνα") \stackrel{\text{Δίκαιο κέρρα}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

- ② Ένα χαρτί εισέρχεται στο για πρώτη φορά σε 52 χαρτα

$E$  - γεγονός ότι το χαρτί είναι ΑΓΟΣ

$F$  - γεγονός ότι το χαρτί είναι κόκκινο.

$$P(EF) = \frac{1}{52}, \quad P(E) = \frac{4}{52}, \quad P(F) = \frac{13}{52}$$

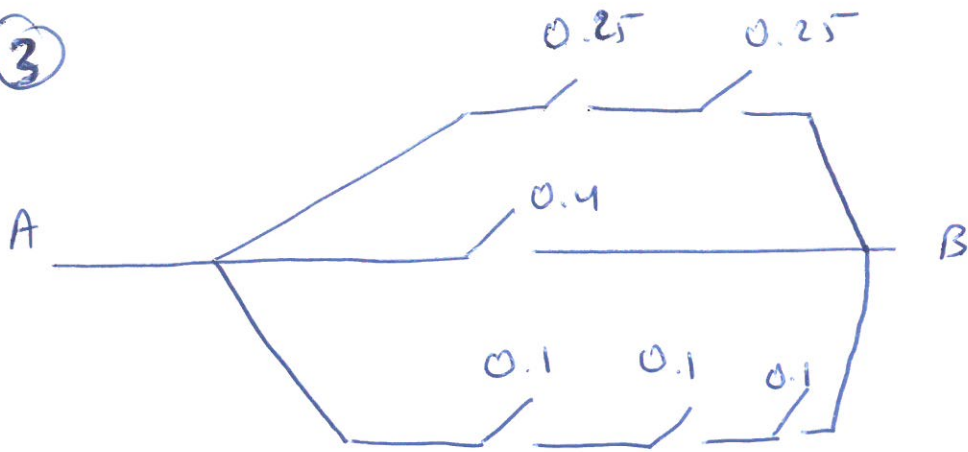
$E$  +  $F$  είναι ανεξάρτητα γεγονότα.

$$(P(EF) = P(E) \cdot P(F))$$



3

18



Γέφυρες μπορεί να συνδεθούν με ασφάλεια όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$P(A \text{ και } B \text{ ασφαλή}) = ?$$

$H_i$  — γαλάνη  $i$  είναι ασφαλή  $i = 1, 2, 3$

$$P(H_1) = (1-0.25) \cdot (1-0.25) = 0.75^2 = 0.5625$$

$$P(H_2) = 0.6$$

$$P(H_3) = (0.9)^3 = 0.729$$

ανεξαρτησία

$$P(\bar{H}) \stackrel{\text{ind.}}{=} P(\bar{H}_1) \cdot P(\bar{H}_2) \cdot P(\bar{H}_3) = (1-0.75^2) (0.4) (1-0.9^3)$$

$$\Rightarrow P(H) = 1 - P(\bar{H}) = 95\%$$

4) Πίνα 2 δίνονται γαρίες (σε km ώρα, ένα και ως προς το αίσιο)

$E_1$  — γεγονός ότι το άδριοιγα των γαρίων = 6

$F$  — γεγονός ότι το κοίλο γαρί = 4

$$P(E_1, F) = P\{(4, 2)\} = \frac{1}{36}$$

$$P(E_1) \cdot P(F) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

$E_1$  και  $F$   
δεν είναι  
ανεξάρτητα!

Ο λόγος είναι ότι αν γέγραφε 6 γκ το  
 πρώτο γράφι δεν μπορούσε να έχει αθροισμα 6  $\Rightarrow$   
 Η πιθανότητα να έχει αθροισμα 6 εφάρμοζε στο  
 2ο γράφι  $\Rightarrow$  τα δύο γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα  
 Έαν το  $E_2$ -γεγονός ότι το αθροισμα των γαριών  
 είναι 7.

$$\Rightarrow P(E_2 F) = P\{(4,3)\} = \frac{1}{36}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(E_2) = \frac{1}{6} \\ P(F) = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(E_2 F) = P(E_2) \cdot P(F) \\ \text{(ανεξάρτητα)} \end{array}$$

Αίσια :

Αν γεγονότα  $E$  και  $F$  είναι ανεξάρτητα τότε και τα  
 γεγονότα  $E$  και  $F^c$  είναι ανεξάρτητα

Απόδειξη :

$$E = EF \cup EF^c \quad \left( \text{και } EF, EF^c \text{ είναι} \right. \\ \left. \text{αμοιβαίως αποκλειόμενα} \right)$$

$$\Rightarrow P(E) = P(EF) + P(EF^c)$$

$$= \underbrace{P(E)P(F)}_{\text{avg.}} + P(EF^c)$$

$$\Rightarrow P(EF^c) = P(E)(1 - P(F)) = \underline{\underline{P(E) \cdot P(F^c)}}$$