

Κλασσική Θεωρία Πιθανοτήτων

Για ισοπίθανα (equiprobable) (βλοχειώδη) ενδεχόμενα, όταν ο αριθμός των βλοχειών Ω $|\Omega| < \infty$ (ωδωραβένος, διαμπλος Δx) και ο αριθμός των βλοχειών στο ενδεχόμενο A είναι $|A|$, τότε

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (\text{Η πιθανότητα ενός βλοχειού είναι } \frac{1}{|\Omega|}).$$

① Δειγματοληψία με Επαναθέση και με Διάταξη (Επαναπληρωμένη Διάταξη)

Εάν ως εστρέψουμε r ανηκειόμενα από ένα σύνολο Ω διαμπλόν ανηκειόμενων με επανάθεση (δηλ. ένα ανηκειόμενο μπορεί να εστρέψει πολλές φορές) και να ταξινομήσουμε την σειρά με την οποία εστρέψουμε τα ανηκειόμενα. Το αποτέλεσμα αυτό θα περιγράφεται ένας για r -άδα των γράμμις (x_1, x_2, \dots, x_r) όπου $x_i = 1, 2, \dots, n$. Από την βασική αρχή της αντιστοιχίας, τα δυνατά αποτελέσματα είναι n^r .

Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα φάρι 5 φορές. Τα ②
 δυνατά αποτελέσματα (εφόσον μας ενδιαφέρει η σειρά
 των φαιών) είναι 65. Υποθέτουμε ότι όλα τα
 αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα να
 προκύψει $(1,1,1,1,1)$ είναι $\frac{1}{6^5}$.

Δύο ρίχνει φάρια:

$$X_i = 1, 2, \dots, 6$$

$$r = 2$$

$$\text{Αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων} = 6^2$$

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

② Δειγματοληψία χωρίς επανεισβολή και με Διάταξη
 (Sampling without replacement, with ordering)

Έστω ότι επιλέγουμε r αντικείμενα από ένα σύνολο
η αντικείμενα χωρίς επανεισβολή και υπογράφουμε
 την σειρά. Ο αριθμός των διακριτών r -άδων που
 υπάρχουν ($r \leq n$) είναι:

$$n \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

Δυνατότητα
για 1^η επιλογή

↳ Δυνατότητα
για 2^η επιλογή

↳ Δυνατότητα για
 r -οστή επιλογή

③ Μεταθέσεις (Permutations)

③

Όταν $r=n$, η διάταξη χωρίς επανέθεση καλείται
μετάθεση (permutation). Ο αριθμός των μεταθέσεων
η αντιστοιχία είναι:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \triangleq n!$$

④ Δειγματοληψία Χωρίς Επανάθεση και Χωρίς Διάταξη (Sampling without Replacement and without Ordering)

Έστω η αντιστοιχία, οι n ομοίων εδαφίων r , χωρίς να υπαγορεύει την σειρά εδαφίου και χωρίς επανέθεση.

Έστω C_r^n οι δυνατοί συνδυασμοί (Combinations).
Για κάθε δυνατο συνδυασμό r αντιστοιχούν υπάρχουν $r!$
δυνατές μεταθέσεις (permutations) ανάμεσα στα r
αντιστοιχία.

Ο ομοίος αριθμός r -άδων είναι: $n(n-1) \dots (n-r+1)$.
Συνεπώς:

$$C_r^n \cdot r! = n(n-1) \dots (n-r+1)$$

$$\Rightarrow C_r^n = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \triangleq \binom{n}{r}$$

(συνδυασμοί r από n)
(n choose r)

Ορισμός: Τα $\binom{n}{r}$ ονομάζονται Διωνυμικοί Συντελεστές (Binomial Coefficients). Εξ ορισμού: (4)

$$0! = 1, \quad 1! = 1 \Rightarrow \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\text{Προφανώς } \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Παράδειγμα: Ένα δοχείο περιέχει 4 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 4. Διαλέγουμε 2 χωρίς να υπογράφουμε την σειρά αρίθμησης και χωρίς επανάλωση. (Δηλαδή $n=4$ και $r=2$). Πόσοι ξεχωριστοί συνδυασμοί υπάρχουν?

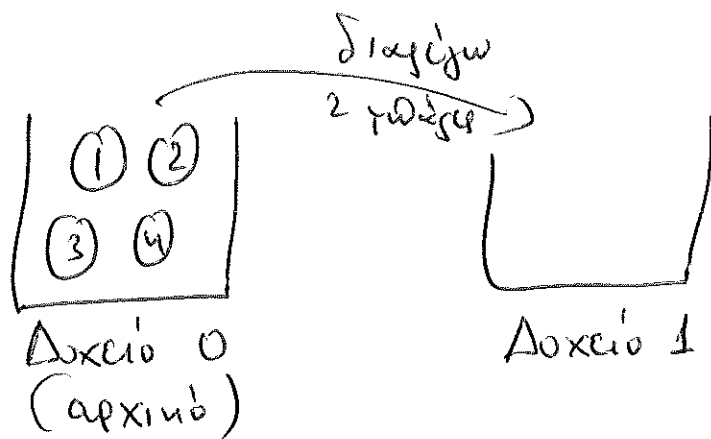
Λύση: Ξέρουμε από προηγούμενες όλη:

$$C_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6 //$$

αριθμός περιθέσεων
επιλεγμένων μπάλων

αριθμός συνδυασμών περιθέσεων
μην επιλεγμένων μπάλων.

Σημείωση: Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρούμε πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για να διαχωρίσουμε τις 4 μπάλες σε 2 ομάδες των 2 μπάλων.



1	2	3	4	5
1	1	0	0	
0	0	1	1	
1	0	1	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
0	1	1	0	

Σημείωση 2: Επίσης, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να βρώ πόσες διαφορετικές μελανιές υπάρχουν για 2 αρώματα (1) και 2 γούστες (0) γωάρες.

Παράδειγμα: Πόσοι διαφορετικοί ζυγάδες υπάρχουν για να διαχωρίσω 10 γωάρες σε τρεις ομάδες, η για ομάδα με 4 γωάρες και οι άλλες δύο ομάδες με 3 γωάρες η κάθε μια.

Λύση: Όσοι οι πιθανοί διαμερισμοί 4/3/3:

$$\Sigma = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!}$$

⑤ Πολλαπλοί Διαμερισμοί

⑥

Έστω ένα σύνολο με n αντικείμενα, το οποίο διαχωρίζεται σε J υποσύνολα B_1, B_2, \dots, B_J , όπου B_j έχει $k_j \geq 0$ αντικείμενα και $k_1 + k_2 + \dots + k_J = n$. Οι πιθανοί διαμερισμοί είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_J!} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Πολλαπλοί Συντελεστές} \\ \text{(Multinomial Coefficients)} \end{array}$$

Για $J=2$: $k_2 = n - k_1$ και $k_1 + k_2 = n$. Έχουμε:

$$\frac{n!}{k_1! (n - k_1)!} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Διωνυμικοί Συντελεστές} \\ \text{(Binomial Coefficients)} \end{array}$$

Παράδειγμα: Ποιοι αναρχηαλισμοί υπάρχουν για τα γράμματα στην λέξη $P_1 P_2 P_3 E_1 E_2 R$?

Απάντηση: Εάν $P_1 \neq P_2 \neq P_3$ και $E_1 \neq E_2$ τότε υπάρχουν $6!$ γειασέσεις.

Εάν $P_1 = P_2 = P_3$ και $E_1 = E_2$ τότε υπάρχουν

$$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} \text{ αναρχηαλισμοί}$$

Παράδειγμα: Έχουμε 9 γυναίκες, 3 υδονίκες, (7)
 4 αϊωρες, και 2 γυζέ. Όλες οι γυναίκες γέ το
 ίδιο χρώμα είναι πανομοιότυπες. Πόσα διαφορετικά
 βήματα γυροαίν να βγαλίσουμε?

Λύση: Μπορούν να βγαλίσουν $\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$ Διαφορετικά
 βήματα.

⑥ Δείχταλση για Επαναθέση Χωρίς Διάταξη
 (Επαναληπτικοί Συνδιασμοί)

(Sampling with Replacement, without Ordering)

Έχουμε οτι εισέρχου r ανεξάρτητα ανάγεται σε η,
 γέ Επαναθέση αγγά χωρίς να γέ ενδιαφέρει η σειρά.
 Κάθε βέλος συνδιασμός γυροαίν να γράφει ως
 Εγεί: π.χ. $r=6$, $x = \text{"γορίων εισέρχουμε"}$

ANT. 1	ANT 2	ANT 3	...	ANT η
xx	xx			xx ← Ένας συνδιασμός
x	x	xxx		x ← Ένας συνδιασμός

Σημείωση: Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο γέ το να
 βωοδεχίω η πανομοιότυπες γυζέ (δυσ. χωρίς
 διάταξη) σε η δοκεία όδου κατέ δοκεί γυροαίν

Έχει ομοιομορφία αριθμό γράφων από το $\textcircled{8}$
 0 έως το r . Είναι σαν να συστημάζω μια
 φόρρα με n στήλες, για για να'δε αντιστρέψω.
 Κάθε φορά που διαλέγω ένα αντιστρέψω βάζω μια
 "X" στην αντίστοιχη στήλη, π.χ. $r=6 \neq n=4$:
 (το r πρέπει να είναι μεγαλύτερο του n):

ANT 1	/	ANT 2	/	ANT 3	/	ANT 4
xx	/	xx	/		/	xx

Η μάδελα (ή "εσωτερικός λούκος") διαχωρίζει τις
 ερωτήσεις του να'δε αντιστρέψω. Ο πιο πάνω συνδυασμός
 μπορεί να γραφεί σε συντομία ως $xx/xx//x$, ούτως
 οι 3 μάδελα υποδηλώνουν τις γραμμές μεταξύ στήλων
 (Γενικά ο αριθμός των μάδελων είναι $n-1$).

Κάθε συνδυασμός των 6 "X" και των 3 μάδελων (1)
 αντιστοιχεί σε ένα εναλλακτικό συνδυασμό $r=6$
 ερωτήσεων κατά-ελα σε $n=4$ αντιστρέψω (σε εναλλάξ,
 χωρίς διέλαση).

Άρα ο αριθμός των εναλλακτικών συνδυασμών είναι
 ίσος με τον αριθμό των μη εναλλακτικών συνδυασμών
 με τον $\textcircled{8}$ ούτως ώστε να ερωτήσω r στήλες (X ή /)
 από $r+n-1$ (ή ούτως οι δυνάμεις τεταρτοβάθμιας)

$$\Rightarrow \text{Αριθμός Εξαναγκασμένων Συνδυασμών} = \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1} = \frac{(r+n-1)!}{r! (n-1)!} \quad (9)$$

Παραδείγματα Πιθανοτήτων

① ^{Πίχτω} Δύο γάρια. Πια η πιθανότητα να φέρω αίθροισμα 7? A

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}, \quad |S| = 6^2 = 36$$

$$A = \{ \underbrace{(1,6), (2,5), \dots, (6,1)}_{6 \text{ αποτελέσματα}} \}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} //$$

② Δοχείο με 6 άσπρες και 5 γαύρες γωάτες.
Παίρνουμε 3 γωάτες όλην ώρα (χωρίς επανένταξη).
Ποια η πιθανότητα να πάραμε για άσπρη γωάτα και δύο γαύρες γωάτες? A

$$|S| = ?$$

Ένταξη γωάτες; $(A) (A) (M)$
 B_1, B_2, \dots, B_{11}

11 επιλογές για την πρώτη γωάτα
10 επιλογές για την δεύτερη γωάτα
9 επιλογές για την τρίτη γωάτα

$$11 \cdot 10 \cdot 9 = |S| = 990$$

(10)

$$S = \{ (B_1, B_2, B_3), (B_1, B_2, B_4), \dots \}$$

Σημείωση: Πιο γενικά: αν έχω $n \geq 0$ αντικείμενα και επιλέγω r , $0 \leq r \leq n$, τότε έχω

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Για το A:

$$\left. \begin{array}{l} 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ W \quad B \quad B \\ \\ 5 \cdot 6 \cdot 4 = 120 \\ \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\ B \quad W \quad B \\ \\ 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120 \\ \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\ B \quad B \quad W \end{array} \right\} 360 \text{ αποτελέσματα}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{360}{990} = \frac{4}{11} //$$

Ένας άγρος πρόεδρος είναι ο αγός: Η ομάδα γέλε λιν
απορία επιλέγοντε τις 3 γλώσσες δεν υπάρχει πρόσο

$$|S| = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \cdot 8!} = 165$$

Πιο γενικά: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$

$$|A| = \binom{6}{1} \binom{5}{2} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 6 \cdot 10 = 60$$

\swarrow 1 Άγρος \swarrow 2 Μάρτυρες

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{60}{165} = \frac{4}{11} //$$

(11)

(όπως οργανώθηκε)

(3) 20 αλόγα
10 γουρπια
Επιλεγουμε 5 αλόγα. Ποικ η ωιδανόλητα να μην
είναι γουρπι.

$$|S| = \binom{20}{5}$$

$$|A| = \binom{10}{5} \cdot \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = \binom{10}{5} \cdot 2^5$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{10}{5} 2^5}{\binom{20}{5}}$$

Είναι ίδια!

Άλλος ένας τρόπος: $P(A) = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}$

(4) Poker: Έχω για τραβούχα 52 χαρτιά.
Δίνω 5 χαρτιά. Ποιά η πιθανότητα να πάρω
φουλ? (full house - Μια τριάδα και για δυο xxxΨΨ)
(π.χ 101010JJ ή 77799 - - -)

$$|S| = \binom{52}{5}$$

$$|A| = \binom{4}{3} \binom{4}{2} \binom{13}{1} \binom{12}{1}$$

3 αλφα 4 για το x
2 αλφα 4 για το ψ.
Ενα αλφα 13 χαρτιά για το xxx
Ενα αλφα 12 χαρτιά για το ψψ.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{13 \cdot 12 \binom{4}{3} \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = 0.0044 \quad (1.4\%)$$

5) 52 χαρτακια. Δίνω 2 χαρτακια. Ποια η
 πιθανότητα να πάρω Blackjack;

12

Blackjack = A10, AJ, AQ, AK.

$$|S| = \binom{52}{2}$$

$$|A| = \binom{4}{1} \binom{4}{1} + \binom{4}{1} \binom{4}{1} + \binom{4}{1} \binom{4}{1} + \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 64$$

$\swarrow \quad \searrow$
 1 αὐτὸ 4 A 1 αὐτὸ 4 J
 $\swarrow \quad \searrow$
 1 αὐτὸ 4 A 1 αὐτὸ 4 Q
 10

π.χ

$$\left\{ \begin{array}{cccc} A_1 10_1 & A_1 10_2 & A_1 10_3 & A_1 10_4 \\ A_2 10_1 & A_2 10_2 & A_2 10_3 & A_2 10_4 \\ A_3 10_1 & A_3 10_2 & A_3 10_3 & A_3 10_4 \\ A_4 10_1 & A_4 10_2 & A_4 10_3 & A_4 10_4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{64}{\binom{52}{2}} //$$